Université de Cergy-Pontoise.
Examen d'approfondissements, 10 mai 2017, 3 heures.

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.
On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. La note sera sur 20. Le barème est indicatif et dépasse volontairement 20. L'épreuve comporte **5 exercices** sur **4 pages**.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (4 points). Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) \;=\; \frac{x}{n+1} \quad \text{et} \quad g_n(x) \;=\; x^n \,.$$

1. Dessiner (sans justification) le graphe des fonctions f_0, f_1, f_2, g_0, g_1 et g_2.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer

   $$\sup_{x\in[0;1]} |f_n(x)| \;:=\; \sup\big\{|f_n(x)|\,;\, x \in [0;1]\big\} \,.$$

   En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, uniformément sur $[0;1]$, vers la fonction nulle.
4. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, uniformément sur $[0;1/2]$, vers la fonction nulle.
5. La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$? Si oui, on précisera vers quelle fonction.

Exercice 2. : (4 points). On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n \;=\; \frac{4n}{n+5}\,, \quad v_n \;=\; (-1)^n\,,\; w_n \;=\; \frac{\sin(5n)}{n+2} \;-\; e^{n\ln(1+2/(n+1))}\,,$$

$$x_n = (-1)^n\Big(7 - \frac{\ln(n)}{n+1}\Big)\,,\; y_n \;=\; \cos\Big((2n+1)\frac{\pi}{6}\Big) \quad \text{et} \quad z_n \;=\; 3 \;-\; \frac{2}{n+1}\,.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et déterminer leur limite. Que peut-on dire $\limsup u_n$?

2. Déterminer $\limsup (v_n + z_n)$. La suite $(v_n + z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?
3. Montrer que la suite $((-1)^n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite. En déduire $\limsup x_n$.
4. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5. Montrer l'égalité $A = B$ pour les ensembles

$$A = \left\{\cos\Big((2n+1)\frac{\pi}{6}\Big)\,;\, n\in\mathbb{N}\right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{-\cos\Big(\frac{\pi}{6}\Big)\,;\, 0\,;\, \cos\Big(\frac{\pi}{6}\Big)\right\}.$$

   Déterminer $\limsup y_n$.

Exercice 3. : (4 points). On considère le système différentiel linéaire $(\mathcal{E})$ d'inconnue $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donné par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = A\cdot Y(t) + B(t)$ où

$$B(t) = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ (t+2)e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre le système différentiel sans second membre $(\mathcal{E}_0)$ associé à $(\mathcal{E})$, qui est donnée par : $\forall t\in\mathbb{R}$, $Y'(t) = A\cdot Y(t)$. On notera par $\mathcal{S}_0$ son ensemble de solutions.
2. En déduire l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation $(\mathcal{E})$.

Exercice 4. : (5 points). Vrai ou faux ? Répondre **avec justification**. Une réponse correcte donne **0,25 point**, une justification correcte donne les points entre paranthèses.

1. L'intervalle $[6; +\infty[$ est un ensemble fermé. **(0,25 point).**
2. La réunion
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]4 + n^{-1}; 9+n[$$
   est un ensemble ouvert. **(0,25 point).**
3. L'intérieur de l'ensemble $[2; +\infty[$ est $]2; +\infty[$. **(0,5 point).**
4. L'adhérence de l'ensemble $\{-2\}\cup\{2+n^{-1}; n\in\mathbb{N}^*\}$ est $\{-2\}\cup\{2+n^{-1}; n\in\mathbb{N}^*\}$. **(0,25 point).**
5. 0 est un point d'accumulation de l'ensemble $[-1; 0[\cap\{n; n\in\mathbb{N}^*\}$. **(0,25 point).**
6. 0 appartient à l'intérieur de $\mathbb{Z}$. **(0,5 point).**
7. L'ensemble
$$A = \left\{x\in\mathbb{R}\,;\ \sin x \in \left]\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{2}\right[\right\}$$
   est ouvert. **(0,5 point).**
8. On considère l'ensemble $A = [1;2]\cup[3;4]$. Toute fonction continue $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée. **(0,5 point).**

Exercice 5. : (8 points). Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est l'algèbre des matrices 2×2 à coefficients réels. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admettant deux valeurs propres réelles $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 < 0$. Soit V_1 et V_2 deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$ tels que $A \cdot V_1 = \lambda_1 V_1$ et $A \cdot V_2 = \lambda_2 V_2$. On rappelle que $(V_1; V_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On considère le système différentiel linéaire (E_0) d'inconnue dérivable $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donné par

$$(E_0) : \quad \forall t \in \mathbb{R}\,,\, tY'(t) \;=\; A \cdot Y(t)\,.$$

On note par S_0 l'ensemble des solutions de (E_0). On **admet** que S_0 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En particulier, il contient la fonction nulle.

On note par "exp" la fonction exponentielle définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On **admet** que, pour $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, la fonction $N : I \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, définie par $N(t) = \exp(f(t)B)$, est dérivable et, pour tout $t \in I$, sa dérivée est donnée par $N'(t) = f'(t)B \cdot N(t) = f'(t)N(t) \cdot B$.

On **admet** que, pour $V \in \mathbb{R}^2$, l'application $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ni B \mapsto B \cdot V \in \mathbb{R}^2$ est linaire continue.

1. Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $N : I \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $N(t) = \exp(f(t)B)$.
   a). Soit $V \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $B \cdot V = \lambda V$. Montrer que, pour tout $t \in I$, $N(t) \cdot V = e^{\lambda f(t)} V$.
   b). Soit $(W_1; W_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$. Montrer que, pour tout $t \in I$, $(N(t) \cdot W_1; N(t) \cdot W_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. En déduire que l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ des fonctions $V : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définies par, pour un $V_0 \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $t \in I$, $V(t) = N(t) \cdot V_0$, c'est-à-dire

$$\mathcal{F} \;=\; \left\{ V : \mathbb{R} \ni t \mapsto N(t) \cdot V_0 \in \mathbb{R}^2 \,,\, V_0 \in \mathbb{R}^2 \right\}\,,$$

   est de dimension 2.
   c). Montrer que $\mathcal{F}$ est l'ensemble S_F des solutions du système différentiel linéaire (F) d'inconnue dérivable $Z : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donné par

$$(F) : \quad \forall t \in I\,,\, Z'(t) \;=\; f'(t)B \cdot Z(t)\,.$$

2. Soit Y une solution de (E_0).
   a). Montrer que $Y(0) \in \mathrm{Ker} A$, le noyau de A.
   b). Montrer qu'il existe deux vecteurs Y_+ et Y_- de $\mathbb{R}^2$ tels que,

$$\begin{aligned} &\text{pour } t > 0\,, \quad Y(t) \;=\; \exp\big((\ln|t|)A\big) \cdot Y_+\,, \\ \text{et,} \quad &\text{pour } t < 0\,, \quad Y(t) \;=\; \exp\big((\ln|t|)A\big) \cdot Y_-\,. \end{aligned}$$

   (Indication : on pourra utiliser 1. c) sur $I =]0; +\infty[$ et $I =]-\infty; 0[$.)
   c). Soit $(y_{+;1}; y_{+;2})$ les coordonnées de Y_+ dans la base $(V_1; V_2)$. Soit $(y_{-;1}; y_{-;2})$ les coordonnées de Y_- dans la base $(V_1; V_2)$. Montrer que

$$\begin{aligned} &\text{pour } t > 0\,, \quad Y(t) \;=\; y_{+;1}\, e^{\lambda_1 \ln|t|}\, V_1 \;+\; y_{+;2}\, e^{\lambda_2 \ln|t|}\, V_2\,, \\ \text{et,} \quad &\text{pour } t < 0\,, \quad Y(t) \;=\; y_{-;1}\, e^{\lambda_1 \ln|t|}\, V_1 \;+\; y_{-;2}\, e^{\lambda_2 \ln|t|}\, V_2\,. \end{aligned}$$

d). Montrer que $y_{+;2} = y_{-;2} = 0$. (Indication : on pourra utiliser la continuité de Y en 0.)

e). Montrer que, si $\lambda_1 \in]0; 1]$, $y_{+;1} = y_{-;1} = 0$. (Indication : on pourra vérifier que $Y(0) = 0$ et utiliser la dérivabilité de Y en 0.)

f). Montrer que, si $\lambda_1 = 0$, $y_{+;1} = y_{-;1}$ et Y est une fonction constante.

g). Montrer que, si $\lambda_1 > 1$, $Y(0) = 0$ et $Y'(0) = 0$.

On a donc montré dans cette question que la fonction nulle est la seule solution de (E_0) si $\lambda_1 \in]0; 1]$.

3. Résoudre le système (E_0) lorsque $\lambda_1 = 0$.
4. Résoudre le système (E_0) lorsque $\lambda_1 > 1$.

Fin de l'épreuve.