Université de Cergy-Pontoise.

Examen d'approfondissements, 6 juin 2016, 2 heures.

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits. On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. La note sera sur 20. Le barème est indicatif. L'épreuve comporte **4 exercices**.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (6 points). On considère le système différentiel (E) d'inconnue $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad Y'(t) \;=\; AY(t) \,+\, 2\begin{pmatrix} e^{-t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix}\,, \quad \text{où } A \;=\; \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

1. Résoudre le système différentiel sans second membre associé (E_0) qui est donné par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = AY(t)$.
2. Vérifier que la fonction $Y_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 donnée par
$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad Y_0(t) \;=\; -\frac{1}{4}e^{-t}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \,+\, e^{3t}\begin{pmatrix} 1-3t \\ 3t+1 \end{pmatrix}\,,$$
est solution de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions S du système (E).

Exercice 2. : (4 points). Déterminer la limite supérieure des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n \;=\; ne^{-n} \,+\, \frac{3-n}{7+n}\,, \quad v_n \;=\; (-1)^n n \,+\, \sin(n)\,.$$

Exercice 3. : (5 points). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les fonctions $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(t) \;=\; \big(t \,+\, n^{-1}\big)^2 \,-\, 3 \quad \text{et} \quad g_n(t) \;=\; \sqrt{n}\,\ln\!\big(1 \,+\, t\cdot n^{-1}\big)\,.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0;1]$ vers f.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que
$$\sup g_n \;:= \sup\big\{g_n(t);\, t \in [0;1]\big\} \;=\; g_n(1)\,.$$
4. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers la fonction nulle. La convergence est-elle uniforme sur $[0;1]$? Justifier la réponse.

Tourner SVP.

Exercice 4. : (6 points). Vrai ou faux ? Répondre **avec justification**. **0,25 point** par réponse correcte, le reste des points pour la justification.

1. L'intervalle $[-7; +\infty[$ est ouvert. **(0,25 point)**.
2. L'adhérence de $]1; 9]$ est $[1; 9]$. **(1,25 point)**.
3. 1 appartient à l'intérieur $\mathring{A}$ de l'ensemble $A =]-3; -2] \cup \{2 - n^{-1}; n \in \mathbb{N}^*\}$. **(0,5 point)**.
4. 0 est un point d'accumulation de l'ensemble $B =]-\infty; -1[\cup \{n^{-1}\sin(n); n \in \mathbb{N}^*\}$. **(1 point)**.
5. Une fonction convexe $f :]-1; 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ admet un minimum sur $]-1; 1[$. **(0,75 point)**.
6. Une fonction dérivable $f : [-1; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue. **(0,75 point)**.

Fin de l'épreuve.