Université de Cergy-Pontoise.
Examen d'approfondissements, 11 mai 2016, 3 heures.

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.
On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. La note sera sur 20. Le barème est indicatif et dépasse volontairement 20. L'épreuve comporte **5 exercices**.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (5 points). On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n = \frac{n^4 - 6n^2 + 7}{3n^4 + 2}, \quad v_n = (-1)^n, \; w_n = 3\,\frac{\ln(n+7)}{n+2} - \frac{4n}{n+5},$$

$$x_n = (-1)^n\Big(7 - \frac{\sin(n)}{n+1}\Big) \quad \text{et} \quad y_n = \cos\Big((2n+1)\frac{\pi}{4}\Big).$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et déterminer leur limite. Que peut-on dire $\limsup u_n$?
2. Déterminer $\limsup (v_n + w_n)$. La suite $(v_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?
3. Montrer que la suite $((-1)^n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite. En déduire $\limsup x_n$.
4. Montrer que l'égalité $A = B$ pour les ensembles

$$A = \Big\{\cos\Big((2n+1)\frac{\pi}{4}\Big)\,;\, n\in\mathbb{N}\Big\} \quad \text{et} \quad B = \Big\{-\cos\Big(\frac{\pi}{4}\Big)\,;\,\cos\Big(\frac{\pi}{4}\Big)\Big\}.$$

   Déterminer $\limsup y_n$.

Exercice 2. : (5 points). On considère le système différentiel linéaire $(\mathcal{E})$ d'inconnue $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donné par : $\forall t\in\mathbb{R}$, $Y'(t) = A\cdot Y(t) + B(t)$ où

$$B(t) = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ (t+2)e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A. Déterminer ses sous-espaces propres. En déduire une matrice 2×2 inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ où

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Résoudre le système différentiel sans second membre $(\mathcal{E}_0)$ associé à $(\mathcal{E})$, qui est donnée par : $\forall t\in\mathbb{R}$, $Y'(t) = A\cdot Y(t)$. On notera par $\mathcal{S}_0$ son ensemble de solutions.

3. En déduire l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation $(\mathcal{E})$.

Exercice 3. : (5 points). Vrai ou faux ? Répondre **avec justification**. **0,25 point** par réponse correcte, les points entre paranthèse pour la justification.

1. L'intervalle $]-\infty;5]$ est un ensemble fermé. **(0,25 point).**
2. La réunion
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n;n+1[$$
est un ensemble ouvert. **(0,25 point).**
3. L'intérieur de l'ensemble $]2;3]$ est $]2;3[$. **(0,5 point).**
4. L'adhérence de l'ensemble $\{-2\}\cup]-1;0]\cup\{2+n^{-1};n\in\mathbb{N}^*\}$ est $\{-2\}\cup[-1;0]\cup\{2+n^{-1};n\in\mathbb{N}^*\}$. **(0,5 point).**
5. 0 est un point d'accumulation de l'ensemble $[-1;0[\cup\{3-n^{-1};n\in\mathbb{N}^*\}$. **(0,25 point).**
6. 0 appartient à l'adhérence de l'ensemble $[-2;-1]\cup\{u_n;n\in\mathbb{N}\}$ où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par
$$u_n \;=\; (-1)^n \ln\Big(2+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\Big). \quad \textbf{(0,5 point).}$$
7. 0 appartient à l'intérieur de l'ensemble
$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[n;n+1[\Big) \;\cup\; \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Big]-\frac{2}{n+1};\frac{-1}{n+1}\Big[\Big). \quad \textbf{(0,5 point).}$$
8. On considère l'ensemble $A=[1;2]\cup[3;4]$. Toute fonction continue $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ est bornée. **(0,25 point).**

Exercice 4. : (4 points). Pour $n\in\mathbb{N}$, on considère les fonctions $f_n:[0;1]\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g_n:[0;1]\longrightarrow\mathbb{R}$ définies par
$$f_n(x) \;=\; \frac{x}{n+1} \quad \text{et} \quad g_n(x) \;=\; x^n\,.$$

1. Dessiner (sans justification) le graphe des fonctions f_0, f_1, f_2, g_0, g_1 et g_2.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, déterminer
$$\sup_{x\in[0;1]}|f_n(x)| \;:=\; \sup\big\{|f_n(x)|\,;\,x\in[0;1]\big\}\,.$$
En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, uniformément sur $[0;1]$, vers la fonction nulle.
4. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, uniformément sur $[0;1/2]$, vers la fonction nulle.

5. La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$? Si oui, on précisera vers quelle fonction.

Exercice 5. : (9 points). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction continue $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) \ = \ \frac{(-1)^{n-1}}{n + x^2} \ .$$

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, soit $S_N : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction continue donnée par

$$S_N(x) \ = \ \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \ ,$$

c'est-à-dire la somme partielle d'ordre N de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ satisfait à la règle spéciale des séries alternées. Elle est donc convergente et sa somme $S(x)$ vérifie, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$S_{2p+2}(x) \ \leq \ S(x) \ \leq \ S_{2p+1}(x) \ . \tag{1}$$

On **admet** que $S(0) = \ln 2$ et que la limite ℓ suivante existe dans $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\ell \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \ > \ 0 \ .$$

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\big|S(x) \ - \ S_N(x)\big| \ \leq \ \frac{1}{N} \ .$$
2. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge vers S, uniformément sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que les limites de S en $-\infty$ et $+\infty$ existent et valent 0.
4. Déduire du 3 que S admet un maximum global.
5. Soit $x \in]-1;1[$ fixé. Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $g_k : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par
$$g_k(N) \ = \ \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{k+1}} \cdot (-x^2)^k \ .$$
Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\sup_{N\in\mathbb{N}^*} \big|g_k(N)\big| \ \leq \ x^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ . \tag{2}$$
En déduire que la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} g_k$ converge, uniformément sur $\mathbb{N}^*$, vers la fonction $g : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $g(N) = S_N(x)$. En déduire que
$$S(x) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, x^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{k+1}} \ . \tag{3}$$
6. Déduire du 5 que S est de classe C^∞ sur $]-1;1[$. Que valent $S'(0)$ et $S''(0)$? Vérifier que 0 est un maximum local de S.

Fin de l'épreuve.