Analyse 3

Exo 1 : $Y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}$ (S) : $Y'(t)=AY(t)$ avec $A=\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}$ essayons de diagonaliser A.

$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda-5=(\lambda+1)(\lambda-5)$ deux valeurs propre -1 et 5

$A+I=\begin{pmatrix}2&4\\2&4\end{pmatrix}$ $\operatorname{Ker}(A+I)=\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$; $A-5I=\begin{pmatrix}-4&4\\2&-2\end{pmatrix}$ $\operatorname{Ker}(A-5I)=\operatorname{vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$A=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}-1&0\\0&5\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}$

$Y'=AY \Leftrightarrow Y'=PDP^{-1}Y \Leftrightarrow P^{-1}Y'=DP^{-1}Y \Leftrightarrow (P^{-1}Y)'=D(P^{-1}Y)$ posons $U=P^{-1}Y$

$U'=DU \Leftrightarrow \begin{cases}U_1'=-U_1\\ U_2'=5U_2\end{cases} \Leftrightarrow \exists K_1,K_2\in\mathbb{R}\ \forall t\in\mathbb{R}\ \begin{cases}U_1(t)=K_1e^{-t}\\ U_2(t)=K_2e^{5t}\end{cases}$ or $Y=PU$

Finalement les solutions de S sont $\begin{cases}y_1(t)=-2K_1e^{-t}+K_2e^{5t}\\ y_2(t)=K_1e^{-t}+K_2e^{5t}\end{cases}$ avec $K_1,K_2\in\mathbb{R}$

1.1 : Soit la norme $\|a_0+a_1X+\dots+a_nX^n\|=\max(|a_0|;|a_1|;\dots|a_n|)$ et $P_n=X^n$

$\|P_n\|=1$ donc la suite $X_1(P_n)$ est bornée. Si $(P_{\varphi(n)})_n$ converge vers $L\in\mathbb{R}[X]$ pour $n>\deg(L)$ on a $\|X^n-L\|\geqslant 1$ qui est le coef en X^n de X^n-L donc $(\|X^n-L\|)$ n'a pas de sous suite qui converge vers 0 donc toutes les sous suites de (P_n) divergent.

1.3 : $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{1+n+x^2}$, pour $x\in\mathbb{R}$ fixé la suite $\left(\dfrac{1}{1+n+x^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 ~~La serie~~ la série $\sum f_n(x)$ est une serie alternée convergente. La serie de fonctions $\sum f_n$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}$. D'après le theoreme sur les series alternées en posant $S_n=\sum_{k=0}^{n} f_k$ et $S=\lim S_n$

$|S_n(x)-S(x)|\leqslant|f_{n+1}(x)|\leqslant\dfrac{1}{1+n+x^2}\leqslant\dfrac{1}{1+n}$ qui ne depend pas de x et qui tend vers 0 lorsque $n\to+\infty$

Donc (S_n) Converge uniformément vers S sur $\mathbb{R}$, S_n est continue donc S est continue.

Exo 2 : $\overset{\circ}{C}=]-1,2[\times]-1,1[$

2) $f(x,y)=\dfrac{1}{x+1}$

3) C est un compact de $\mathbb{R}^2$ car c'est un ensble fermé, bornée et f est continue car c'est une fonction polynomiale or une fct continue sur un compact à valeur dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

4 Si f atteint ses bornes en un point interieur à C c'est un point critique de f. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y^2=3(x^2-y^2)$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-6xy$.

f possede une unique point critique en $(0,0)$ et $f(0,0)=0$.

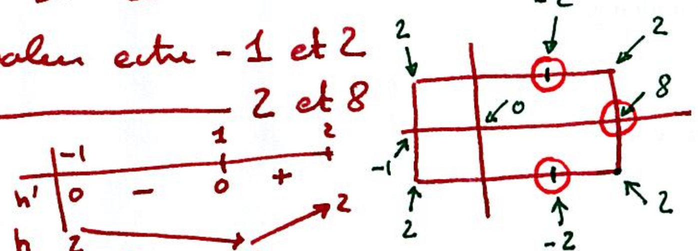
f peut aussi atteindre ces bornes sur le bord de C.

$f(-1;y)=-1+3y^2$ prend toutes les valeurs entre -1 et 2

$f(2;y)=8-6y^2$ ——— 2 et 8

$f(x;1)=x^3-3x$ $\quad h(x)=x^3-3x$

$f(x;-1)=$ $\quad h'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$



Finalement f possede un max global en $(2,0)$ $f(2,0)=8$
min global en $(1;\pm1)$ $f(1;\pm1)=-2$

Exo 3 : K est un compact si toute suite d'éléments de K possede une ss suite convergente dans K.

3.2 : Pour tout n $K_n\neq\emptyset$, il existe donc $(x_n\in K_n$. Une suite (x_n) ainsi definie a tous ces éléments dans K_0 qui est un compact, elle possede une sous suite convergente dans K_0. $(x_{\varphi(n)})\to a\in K_0$.

Soit $N\in\mathbb{N}$ pour $n\geqslant N$ $x_n\in K_n$ or $K_n\subset K_N$ donc $(x_{\varphi(n)})_{n\geqslant N}$ est une suite convergente d'elemt de K_N qui est un fermé de E (car K_N est compact) donc $a\in K_N$. Finalement a appartient à tous les K_N.

3.3 : $F_n=[n;+\infty[$. F_n est un fermé de $\mathbb{R}$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n=\emptyset$.

Exercice 4.

1) $f_1(x)=1+\frac{1}{2}\int_0^x 1\,dt=1+\frac{1}{2}x$ $\qquad f_2(x)=1+\frac{1}{2}\int_0^x 1+\frac{1}{2}t^2\,dt=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2$

2) Posons H_n : $\forall x\in[0,1]$ $|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$.

$|f_1(x)-f_0(x)|=\left|\frac{1}{2}x\right|\leqslant\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2^0}=1$, donc H_0 est vrai

Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que H_n est vrai

$|f_{n+2}(x)-f_{n+1}(x)|=\frac{1}{2}\left|\int_0^x f_{n+1}(t^2)-f_n(t^2)\,dt\right|\leqslant\frac{1}{2}\int_0^x|f_{n+1}(t^2)-f_n(t^2)|\,dt\leqslant\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{2^n}dt\leqslant\frac{x}{2^{n+1}}\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}$

on a montré H_0 et $\forall n\in\mathbb{N}$, $H_n\Rightarrow H_{n+1}$, par recurrence on a donc $\forall n\in\mathbb{N}$, H_n.

3) $\sup_{x\in[0,1]}|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\leqslant\frac{1}{2^n}$ et $\sum\frac{1}{2^n}$ cve donc la serie $\sum f_{n+1}-f_n$ C.N. sur $[0,1]$

4) (g_n) C.U. vers g sur I si $\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in I}|f_n(x)-g(x)|\right)=0$.

$(\sum U_n)$ C.U. sur I, si la suite des sommes partielles $S_n=\sum_{k=0}^{n}U_k$ C.U. sur I vers une fonction S.

5) ici $\sum(f_{n+1}-f_n)$ C.N. sur $[0,1]$ donc C.U. sur $[0;1]$ donc (S_n) C.U. sur $[0,1]$ avec $S_n=\sum_{k=0}^{n}f_{k+1}-f_k=f_{n+1}-f_0$

donc (f_n-f_0) C.U. vers une fonction $\tilde{f}$ sur $[0,1]$ et donc (f_n) C.U. vers $\tilde{f}+1$ sur $[0,1]$.

6) $\sup_{t\in[0,1]}|g_n(t)-f(t^2)|=\sup_{t\in[0,1]}|f_n(t^2)-f(t^2)|=\sup_{u\in[0,1]}|f_n(u)-f(u)|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

7) On montre par recurrence que pour tout n, f_n est continue, en effet si f_n est continue la fonction definie par $1+\frac{1}{2}\int_0^x f_n(t^2)\,dt$ est aussi continue. Comme (f_n) C.U. vers f sur $[0,1]$, la fonction f est continue.

Pour x fixé (g_n) C.U. vers $t\to f(t^2)$ sur $[0,x]$ donc

$\int_0^x g_n(t)\,dt\xrightarrow{n\to\infty}\int_0^x f(t^2)\,dt$ et $\lim f_{n+1}(x)=f(x)$

Donc on peut passer à la limite dans l'egalité $f_{n+1}(x)=1+\frac{1}{2}\int_0^x f_n(t^2)\,dt$

et on obtient $f(x)=1+\frac{1}{2}\int_0^x f(t^2)\,dt$.