L2M, DL-MI, DL-MP, CUPGE-MP
Durée de l'épreuve : 3 heures
Barème indicatif : 7+4+3+6

Examen Analyse 3

Les documents sont interdits. L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices, les téléphones et tout objet connecté en particulier les montres doivent être éteints et rangés dans un sac fermé.

Exercice 1: Les trois questions sont indépendantes :

1. Résoudre le système différentiel : $(S) : \begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + 4y_2(t) \\ y_2'(t) = 2y_1(t) + 3y_2(t) \end{cases}$
2. Donner un exemple d'une suite bornée de $\mathbb{R}[X]$ (munie d'une norme que vous choisirez) qui ne possède aucune valeur d'adhérence.
3. Montrer que la série de fonctions $\sum \frac{(-1)^n}{1+n+x^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ puis que sa somme est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2: Soit $C = [-1; 2] \times [-1; 1]$ et $\forall (x, y) \in C, f(x, y) = x^3 - 3xy^2$

1. Représenter C et déterminer $\overset{\circ}{C}$.
2. Donner un exemple de fonction g définie sur $\overset{\circ}{C}$, continue et non bornée.
3. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes sur C.
4. Déterminer le(s) point(s) critique(s) de f sur $\overset{\circ}{C}$.
5. Déterminer, en justifiant votre raisonnement, les extrema de la fonction f sur C, c'est-à-dire déterminer $m = \min f(C)$ et $M = \max f(C)$.

Exercice 3: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Soit $K \subset E$, rappeler la définition de "K est un compact de E".
2. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de compacts non vides de E décroissante c'est à dire $\forall n \in \mathbb{N}, K_{n+1} \subset K_n$.
   En considérant (x_n) une suite d'éléments de E vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in K_n$, montrer que l'intersection des K_n est non vide, c'est à dire $\exists a \in E, \forall n \in \mathbb{N}, a \in K_n$.
3. Donner un exemple d'une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés, non vides, décroissante ($\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} \subset F_n$) de $\mathbb{R}$ dont l'intersection est vide.

Exercice 4: On définit par récurrence la suite de fonctions (f_n) par $f_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$ et

$$\forall x \in [0, 1], f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x f_n(t^2)\,\mathrm{d}t$$

1. Déterminer pour $x \in [0; 1]$, $f_1(x)$ puis montrer que $\forall x \in [0, 1],\ f_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^3$.
2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1];\ |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}$.
3. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0}(f_{n+1} - f_n)$ converge normalement sur $[0, 1]$.
4. Rappeler la définition de la convergence uniforme sur un intervalle J d'une suite de fonctions (g_n), puis d'une série de fonctions $\sum u_n$.
5. Déduire des questions 3. et 4. que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$. On notera f la fonction limite.
6. On pose pour $t \in [0; 1],\ g_n(t) = f_n(t^2)$, montrer que la suite (g_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
7. Démontrer que f est une fonction continue qui vérifie

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x f(t^2)\,\mathrm{d}t$$