L2M&CUPGE-MP
Durée de l'épreuve : 1,5 heures
Barème indicatif : 7+6+7

Examen Analyse 3, session 2, 19 juin 2024

Les documents sont interdits. L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices, les téléphones et tout objet connecté en particulier les montres doivent être éteints et rangés dans un sac fermé.

Exercice 1: Soit le système différentiel : $(S_1) : \begin{cases} y_1'(t) = 9y_1(t) - 20y_2(t) \\ y_2'(t) = 4y_1(t) - 9y_2(t) \end{cases}$

1. Résoudre (S_1).
2. Déterminer la solution (z_1, z_2) de (S_1) qui vérifie $y_1(0) = 1;\ y_2(0) = 0$. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}\big(z_1(t), z_2(t)\big)$

Exercice 2: Soit la suite de fonctions (f_n) définies sur $]0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f_n(x) = 1 & \text{si} & x \in]n; n+1] \\ f_n(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$

1. Représenter f_2, f_3 puis S_4.
2. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}_+^*$, on note f la fonction limite.
3. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}_+^*$
4. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum_n f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Que vaut la somme $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ de cette série de fonctions ?
5. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_n f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$
6. Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_n f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$

   Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n(x) = \dfrac{1}{x} f_n(x)$.
7. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum g_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$
8. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum g_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$
9. Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum g_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 3:

1. Rappeler une condition (faisant intervenir les suites) nécessaire et suffisante pour qu'une partie F d'un espace vectoriel normé $(E; \|\cdot\|)$ soit un fermé de E.
2. Donner un exemple de fonction $h : \mathbb{R} \to [0; 1]$ continue telle que $h(\mathbb{R})$ ne soit pas un fermé de $\mathbb{R}$. Un dessin clair pourra convenir.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to [0; 1]$ une fonction continue ; on pose $G = \big\{\big(x, f(x)\big) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}\big\}$, montrer que G est un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$. On pourra par exemple considérer une suite d'éléments de G : $\big((x_n, y_n)\big)_n$ qui converge vers $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
4. On veux montrer la réciproque : soit $g : \mathbb{R} \to [0; 1]$ telle que $G = \big\{\big(x, g(x)\big) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}\big\}$ est un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$, on ne suppose pas que g est continue. Soit $l \in \mathbb{R}$, (x_n) une suite de réels qui converge vers l, et $y_n = g(x_n)$.
   (a) Montrer que la suite $(y_n)_n$ possède une sous suite convergente, notons $(y_{\varphi(n)})_n$ une telle sous suite.
   (b) Justifier que $\Big(\big(x_{\varphi(n)}; g(x_{\varphi(n)})\big)\Big)_n$ converge dans $\mathbb{R}^2$.
   (c) Justifier que la suite de réels $\big(g(x_{\varphi(n)})\big)_n$ converge vers $g(l)$.
   (d) Conclure.