L2M&CUPGE-MP(1)
Durée de l'épreuve : 2,5 heures
Barème indicatif : 5+3+5+7

CERGY PARIS UNIVERSITÉ

Examen Analyse 3, 14 mai 2024

Les documents sont interdits. L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices, les téléphones et tout objet connecté en particulier les montres doivent être éteints et rangés dans un sac fermé.
A la fin de l'épreuve, glisser le sujet dans votre copie.

Exercice 1: Soit le système différentiel : $(S_1) : \left\{ \begin{array}{l} y_1'(t) = 5y_1(t) - 2y_2(t) \\ y_2'(t) = 6y_1(t) - 2y_2(t) \end{array} \right.$

1. Résoudre (S_1).
2. En utilisant une partie des calculs déjà effectués, résoudre $(S_2) : \left\{ \begin{array}{l} y_1'(t) = 5y_1(t) - 2y_2(t) + e^{-t} \\ y_2'(t) = 6y_1(t) - 2y_2(t) + e^{-t} \end{array} \right.$
3. Déterminer la solution de (S_1) qui vérifie $y_1(0) = 2;\ y_2(0) = 4$, sa limite en $-\infty$ est (0 ;0), quelle est alors "sa tangente" en ce point ?

Exercice 2: Pour chacune des parties A_i suivantes répondre au verso aux 4 questions :

Est-ce un ouvert de $\mathbb{R}^2$? Est-ce un fermé de $\mathbb{R}^2$? Quel est son intérieur $(\overset{\circ}{A})$? Quel est son adhérence $(\overline{A})$?

$$A_1 =]-2;2[\times[0;1] \qquad A_2 = [-2;+\infty[\times[0;+\infty[\qquad A_3 =]1;2[\times\{3\} \qquad A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^4 + xy^3 > 1\}$$

Exercice 3: Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]1;+\infty[$, on pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$, et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $]1;+\infty[$. On note S sa somme.
2. Montrer que la série de fonctions de terme général u_n' converge uniformément sur $]1;+\infty[$, vers une fonction T que l'on écrira comme la somme d'une série. On pourra montrer que $\forall x \in]1;+\infty[, |S_n'(x) - T(x)| \leqslant \frac{1}{\ln^2(n+1)}$.
3. Énoncer avec précision un théorème qui permet d'en conclure que S est dérivable.
4. Soit $(v_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de réels qui tend vers 0. Montrer que la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n v_n$ est négative. En posant $S_N = \sum_{n=1}^{N}(-1)^n v_n$, on pourra étudier le signe de S_{2N}.
5. Déduire, des deux questions précédentes, le sens de variations de la fonction S.

Exercice 4: Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, on rappelle que l'espace vectoriel $E \times F$ est muni des deux opérations suivantes :

$$\begin{array}{l} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in E \times F,\ \lambda.(x,y) = (\lambda x, \lambda y) \\ \forall (x,y) \in E \times F, \forall (x',y') \in E \times F,\ (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \end{array}$$

Pour $(x,y) \in E \times F$ on pose $N\big((x,y)\big) = \max(\|x\|_E, \|y\|_F)$.

1. Rappeler la définition d'une norme sur un espace vectoriel. Montrer que N est une norme sur $E \times F$.
2. Dans cette question et uniquement dans cette question on suppose que $E = F = \mathbb{R}$ et $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_F$ est la valeur absolue, représenter la boule unité de $(\mathbb{R}^2, N)$, $B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / N\big((x,y)\big) < 1\}$.
3. Rappeler la définition de "Ω_1 est un ouvert de $(E, \|\cdot\|_E)$".
4. Soit Ω_1 un ouvert de $(E, \|\cdot\|_E)$ et Ω_2 un ouvert de $(F, \|\cdot\|_F)$, montrer que $\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1,\omega_2) \in E \times F / \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}$ est un ouvert de $(E \times F, N)$.
5. Soit $\Omega_1 \subset E$ et $\Omega_2 \subset F$ $(\Omega_2 \neq \varnothing)$, montrer que si $\Omega_1 \times \Omega_2$ est un ouvert de $(E \times F, N)$, alors Ω_1 est un ouvert de $(E, \|\cdot\|_E)$.
6. Rappeler la définition de "K_1 est un compact de $(E, \|\cdot\|_E)$".
7. Soit K_1 un compact de $(E, \|\cdot\|_E)$ et K_2 un compact de $(F, \|\cdot\|_F)$, montrer que $K_1 \times K_2$ est un compact de $(E \times F, N)$.

Numéro de copie :

	Ouvert	Fermé	$\mathring{A}$	$\overline{A}$
A_1	oui non	oui non	$\mathring{A}_1=$	$\overline{A}_1 =$
A_2	oui non	oui non	$\mathring{A}_2=$	$\overline{A}_2 =$
A_3	oui non	oui non	$\mathring{A}_3=$	$\overline{A}_3 =$
A_4	oui non	oui non	$\mathring{A}_4=$	$\overline{A}_4 =$