

CY Cergy Paris Université
Date: mai 2023

CT Analyse 3

Durée: 1h, les calculatrices ne sont pas autorisées

Exercice 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(x) = e^{-nx} \sin(nx).$$

- (1) Est ce que la suite de fonctions (f_n) converge simplement? Si oui, déterminer la fonction limite.
- (2) Soit $\epsilon > 0$, justifier que (f_n) converge uniformément sur l'intervalle $[\epsilon, +\infty[$.
- (3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $f_n(\frac{\pi}{2n})$. En déduire que (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2.

Trouver la solution vérifiant $x(0) = 1$ de l'équation différentielle

$$x' + x = t.$$

Exercice 3.

Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$x'' - 2x' - 8x = e^t.$$

Exercice 4.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On considère le système différentiel définie sur \mathbb{R} :

$$X' = AX.$$

- 1) Calculer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice A . En déduire la solution générale du système.
- 2) Soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

On considère le système différentiel définie sur \mathbb{R} :

$$X' = AX + B.$$

Trouver une solution particulière de ce système différentiel. En déduire sa solution générale.