Emmanuel Hebey
Année 2024-2025

Algèbre bilinéaire
Examen
(Durée 2 heures)
(Le barème est donné à titre indicatif)
(Les notes supérieures à 20 sont ramenées à 20)
(Les documents sont interdits)

Exercice 1: (3 pts) Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$Q(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + 12z^2 + 4xy - 6xz - 8yz\ .$$

Déterminer le rang et la signature de Q. Justifier votre réponse.

Exercice 2: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire symétrique donnée par

$$\begin{aligned} B(x, y) = {} & 5x_1y_1 + 3x_2y_2 + (8 - \lambda)x_3y_3 - 2(x_1y_2 + x_2y_1) \\ & - 3(x_1y_3 + x_3y_1) - (x_2y_3 + x_3y_2)\ , \end{aligned}$$

où les x_i et y_i sont les coordonnées de x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1) (2 pts) Pour quelles valeurs de λ la forme B définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

(2) (4 pts) On suppose $\lambda = 3$ et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire B obtenue pour cette valeur de λ ainsi que $\| \cdot \|$ la norme qui lui est associée. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 3: Soit A la matrice réelle 3×3 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

(1) (2 pts) Calculer le polynôme caractéristique P de A et trouver les valeurs propres de A.

(2) (4 pts) Dire pourquoi A est diagonalisable et trouver P une matrice orthogonale 3×3 et D une matrice diagonale pour lesquelles on a la relation ${}^tPAP = D$.

Exercice 4: On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices 2×2 réelles. On considère le produit scalaire

$$\langle A, B\rangle = \text{trace}({}^t AB)$$

et on considère la base canonique $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On considère $f \in \text{End}\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right)$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donné par

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a + \beta c + d & 2b + \alpha d \\ \alpha a - c + \gamma d & a + b + c + \gamma d \end{pmatrix}$$

On rappelle et on admet que (A_1, A_2, A_3, A_4) est une base orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $f^\star$ l'endomorphisme adjoint de f pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(1) (2 pts) Ecrire la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ de f dans $\mathcal{B}$. Pour quelle(s) valeur(s) des réels α, β et γ cet endomorphisme est-il symétrique ? Que vaut $f^\star$ pour ces valeurs de α, β et γ ?

(2) (3 pts) On suppose maintenant que $\alpha = -1$ et $\beta = \gamma = 1$. Soient a, b, c, d des réels quelconques. Que vaut $f^\star\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$?

Exercice 5: (2 pts) Montrer qu'il n'y a pas de matrice réelle symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant que $A^4 + 3A^2 + 2I_n = 0$, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.