Emmanuel Hebey
Année 2023-2024

Algèbre Bilinéaire
Examen
(Durée 2 heures)
(Le barème est donné à titre indicatif)
(Les notes supérieures à 20 sont ramenées à 20)
(Les documents et les calculatrices sont interdits)

Exercice 1:

I - Partie A: Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$Q(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$. On ne demande pas de contrôler que Q est bien une forme quadratique.

(1) (1 pt) Donner l'expression de la forme polaire B de Q. Quelle est sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$?

(2) (3 pts) Quelle est la signature de Q ? Quel est la rang de Q ? Vous justifierez les différentes étapes de votre analyse.

(3) (1 pt) Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ le vecteur $u_a(a, 1, 1)$ est-il isotrope pour Q ?

II-Partie B: Au lieu de considérer Q on considère maintenant la forme quadratique $\tilde{Q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\tilde{Q}(x) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 2x_2x_3$$

Soit $\tilde{B}$ la forme polaire de $\tilde{Q}$.

(4) (2 pts) Montrer que $\tilde{B}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$. On pourra, si on le souhaite, utiliser des développements en $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ pour montrer que $\tilde{B}$ est définie positive au lieu de recommencer un algorithme de Gauss (à savoir une décomposition de Sylvester) de la forme quadratique $\tilde{Q}$.

(5) (1 pt) Les vecteurs $u(1, 1, 0)$ et $\tilde{u}(0, 1, 0)$ sont-ils orthogonaux pour le produit scalaire $\tilde{B}$? Et qu'en est-il des vecteurs u et $v(1, 1, 1)$?

(6) (2 pts) Soit $w(1, 0, 1)$. Trouver des réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour que le vecteur $s = w + \alpha u + \beta v$ soit perpendiculaire (relativement à $\tilde{B}$) au plan P de base (u, v), où u et v sont comme à la question précédente.

(7) (1 pt) Soit s le vecteur trouvé à la question précédente. Déterminer $P^\perp$ (l'orthogonal de P pour $\tilde{B}$) en fonction de s. Justifier votre réponse.

Exercice 2: Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & b & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} .$$

(1) (1 pt) Quelle équation doivent vérifier a et b pour que le déterminant de $A - \mathrm{Id}_3$ soit nul, où Id_3 est la matrice identité 3×3 ?

Dans la suite on pose $a = 2$ et $b = 5$.

(2) (2 pts) Montrer que le polynôme caractéristique de A a deux racines, dont une double.

(3) (4 pts) Trouver P matrice orthogonale et D diagonale telles que l'on ait ${}^tPAP = D$.

Exercice 3:

(1) (1 pt) Soit A une matrice symétrique $n \times n$ dont les valeurs propres sont toutes strictement positives. Montrer qu'il existe M inversible $n \times n$ telle que $A = {}^tMM$ et que l'on peut même choisir M symétrique, à savoir telle que ${}^tM = M$.

(2) (2 pts) Soit M une matrice inversible $n \times n$. On pose $A = {}^tMM$. Montrer que A est symétrique, inversible et que ses valeurs propres sont forcément strictement positives. On pourra, si on le souhaite (il y a d'autres façons de procéder), considérer $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et relier l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^n$ ayant A pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ ayant M pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et l'adjoint de f.

(3) (3 pts) On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices 2×2 réelles. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4. On considère le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donné par

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{trace}({}^tAB)$$

et on considère la base canonique $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par les matrices

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \; E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \; E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

On considère $f \in \mathrm{End}\,(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donné par

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a + c & -2b + \alpha d \\ \alpha a - c & b + 3d \end{pmatrix}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de α cet endomorphisme est-il symétrique ?