Emmanuel Hebey
Année 2022-2023

Algèbre Bilinéaire
Examen
(Durée 2 heures)
(Le barème est donné à titre indicatif)
(Les notes supérieures à 20 sont ramenées à 20)
(Les documents sont interdits)

Exercice 1: I-Partie A: Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$Q(x) = x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

pour tout vecteur $x(x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$. On ne demande pas de contrôler que Q est bien une forme quadratique.

(1) (1 pt) Donner l'expression de la forme polaire B de Q. Quelle est sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$?

(2) (2 pts) Quelle est la signature de Q ? Quel est le rang de Q ? Vous justifierez les différentes étapes de votre analyse.

(3) (1 pt) Le vecteur $u(1, 0, 1)$ est-il un vecteur isotrope pour Q ? Et qu'en est-il du vecteur $v(1, 1, 0)$? Les vecteurs $w(1, 0, 0)$ et $\tilde{w}(0, 1, -1)$ sont-ils orthogonaux pour B ?

II-Partie B: Au lieu de considérer Q on considère maintenant la forme quadratique $\hat{Q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\hat{Q}(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$$

Soit $\hat{B}$ la forme polaire (donc bilinéaire et symétrique) de $\hat{Q}$.

(4) (2 pts) Ecrire la forme polaire $\hat{B}$ et montrer que $\hat{B}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$. On pourra, si on le souhaite, utiliser des développements en $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ pour montrer que $\hat{B}$ est définie positive au lieu de recommencer un algorithme de Gauss (à savoir une décomposition de Sylvester) de la forme quadratique $\hat{Q}$.

(5) (1 pt) Les vecteurs $\hat{u}(1, 1, 0)$ et $\tilde{u}(0, 1, 0)$ sont-ils orthogonaux pour le produit scalaire $\hat{B}$? Et qu'en est-il des vecteurs $\hat{u}$ et $\hat{w}(0, 1, -2)$?

(6) (2 pts) Soit P le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de base $(\hat{u}, \hat{v})$ où $\hat{u}(1, 1, 0)$ et $\hat{v}(2, 9, 5)$. Soit D la droite vectorielle de vecteur directeur $\hat{w}(0, 1, -2)$. Montrer que $P^\perp = D$ (où $P^\perp$ est l'orthogonal de P pour $\hat{B}$). On pourra ne montrer qu'une inclusion et utiliser un argument de dimension.

Exercice 2: On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} .$$

(1) (1 pt) Calculer le déterminant de $A - \mathrm{Id}_3$ où Id_3 est la matrice identité 3×3.

(2) (1 pt) Montrer que le polynôme caractéristique de A a deux racines, dont une double.

(3) (4 pts) Trouver P matrice orthogonale et D diagonale telles que l'on ait ${}^tPAP = D$.

Exercice 3: Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Soit $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme de E et soit $f^\star \in \mathrm{End}(E)$ l'adjoint de f.

(1) (1 pt) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f^\star) \subset \mathrm{Ker}(f + f^\star)$.

(2) (3 pts) On suppose de plus que $f \circ f = 0$. Montrer qu'alors $\mathrm{Ker}(f + f^\star) \subset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f^\star)$.

Exercice 4: Soit A une matrice symétrique $n \times n$. On dit que A est définie positive si pour tout vecteur colonne non nul X à n lignes, ${}^tXAX > 0$. On admet que A est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

(1) (2 pts) Soit A une matrice symétrique $n \times n$ définie positive. Montrer qu'il existe M inversible $n \times n$ telle que $A = {}^tMM$.

(2) (2 pts) On admet le théorème de décomposition d'Iwasawa: *Pour toute matrice carrée $n \times n$ inversible M, il existe P orthogonale $n \times n$ et T triangulaire supérieure $n \times n$ à diagonale strictement positive telles que $M = PT$.* Démontrer le théorème de décomposition de Cholesky, à savoir que pour toute matrice symétrique $n \times n$ définie positive A, il existe une matrice T triangulaire supérieure à diagonale strictement positive telle que $A = {}^tTT$.