Emmanuel Hebey
Année 2021-2022

Algèbre bilinéaire
Examen
(Durée 2 heures)

(Le barème est donné à titre indicatif)
(Les notes supérieures à 20 sont ramenées à 20)
(Les documents sont interdits)

Exercice 1: (5 pts) Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$Q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + 3xy - 4xz \; .$$

Déterminer le rang et la signature de Q.

Exercice 2: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire symétrique donnée par

$$B(x, y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1 \; ,$$

où les x_i et y_i sont les coordonnées de x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1) (3 pts) Pour quelles valeurs de λ la forme B définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$? On pourra décomposer la forme quadratique associée à B comme on le fait dans le calcul de la signature des formes quadratiques.

(2) (3 pts) On suppose $\lambda = 0$. Trouver une base orthonormée de B.

Exercice 3: (5 pts) Soit A la matrice 3×3 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \; .$$

Quel théorème permet d'affirmer que A est diagonalisable ? Calculer le polynôme caractéristique de A et montrer que -1 est racine double de P. Trouver P orthogonale et D diagonale telles que ${}^tPAP = D$.

Exercice 4: On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices 2×2 réelles. On considère le produit scalaire

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{trace}({}^tAB)$$

et on considère la base canonique $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; .$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On considère $f \in \mathrm{End}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donné par

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+\beta c & 2b+\alpha d \\ \alpha a - c & b+d \end{pmatrix}$$

On admet que (A_1, A_2, A_3, A_4) est une base orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(1) (2 pts) Ecrire la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ de f dans $\mathcal{B}$. Pour quelle(s) valeur(s) de α et β cet endomorphisme est-il symétrique ?

(2) (3 pts) On suppose $\alpha = -1$ et $\beta = 1$. On note $f^\star$ l'endomorphisme adjoint de f. Que vaut $f^\star\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$?

Exercice bonus: (3 pts) Soit $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit aussi $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que f est symétrique. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de f rangées par ordre croissant. On définit le quotient de Rayleigh de f par

$$\mathcal{R}(x) = \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Montrer que $\lambda_1 = \min\limits_{x \neq 0} \mathcal{R}(x)$ et que $\lambda_p = \max\limits_{x \neq 0} \mathcal{R}(x)$.