Université de Cergy-Pontoise
Licence 2, cours MS4IP
Année 2013/2014

Examen final (3h)

Notes de cours manuscrites interdites à l'exception d'une feuille A4 recto verso. Livres, photocopies, calculatrices ou appareils électroniques interdits. Veuillez numéroter et indiquer votre numéro de candidat sur toutes les feuilles rendues. Justifier toutes vos réponses

Exercice 1. Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y+z, y+2z, 2x+y+8z) \end{array}$$

1) Montrer que f est linéaire
2) Donner les définitions du noyau Ker f et de l'image Im f
3) Déterminer une base de Ker f
4) Déterminer une base de Im f
5) Déterminer si l'endomorphisme f est injectif, surjectif ou bijectif

Exercice 2. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$$

et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ le système de vecteurs défini par

$$\varepsilon_1 = (1,0,1), \quad \varepsilon_2 = (1,1,0), \quad \varepsilon_3 = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3.$$

1) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$
2) Calculer les matrices de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$
3) Montrer que

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y+z, x+z, y-2z) \end{array}$$

est linéaire
4) Calculer explicitement les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} f$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} f$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} f$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} f$

Exercice 3. Soient $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$, $\varepsilon_2 = (1, 1, 0)$ et $\varepsilon_3 = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.
1) Montrer que $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
2) Déterminer explicitement l'unique endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Étudier la diagonalisabilité sur $\mathbb{R}$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

En cas de diagonalisabilité, diagonaliser explicitement cette matrice (Indication : on pourra remarquer que 2 est valeur propre de la matrice A)

Exercice 5. Étudier la diagonalisabilité sur $\mathbb{R}$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

En cas de diagonalisabilité, diagonaliser explicitement cette matrice (Indication : on pourra remarquer que 1 est valeur propre de la matrice A)

Exercice 6. Donner un exemple de matrice de $M_2(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais non diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Justifier votre réponse