Université de Cergy-Pontoise
Licence 2, cours MS4IP
Année 2012/2013

Examen final (3h)

Notes de cours manuscrites interdites à l'exception de deux feuilles recto verso. Livres, photocopies, calculatrices ou appareils électroniques interdits. Veuillez numéroter et indiquer votre numéro d'étudiant sur toutes les feuilles rendues. Justifier toutes vos réponses

Exercice 1. Soient $x, \theta \in \mathbb{R}$. On définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_x = I_3 + xA + \frac{1}{2}x^2A^2$$

1) Montrer que $A^3 = 0$ (on pourra utiliser l'identité $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$)
2) Montrer

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad A_xA_y = A_{x+y}$$

3) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la matrice A_x est inversible et calculer explicitement son inverse A_x^{-1}

Exercice 2.
1) On considère les vecteurs $\varepsilon_1 = (1, -1, 1)$, $\varepsilon_2 = (2, 1, -1)$, $\varepsilon_3 = (4, -1, 1)$, $\varepsilon_4 = (-1, -2, 2) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer une base du sous-espace vectoriel

$$F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \subset \mathbb{R}^3$$

2) On considère les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que le système (A_1, A_2, A_3, A_4) forme une base de $M_2(\mathbb{R})$?

Exercice 3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

On considère le système de vecteurs $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ défini par

$$e'_1 = e_1 - e_3, \quad e'_2 = -e_1 + e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + e_3.$$

1) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$
2) Calculer les matrices de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$
3) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est donnée par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer explicitement l'application linéaire f
4) Calculer explicitement les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} f$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} f$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} f$

Exercice 4. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

1) Montrer que 0, 1, 4 sont valeurs propres de la matrice A dans $\mathbb{R}$
2) Justifier le fait que la matrice A soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$
3) Déterminer explicitement P une matrice inversible de $M_3(\mathbb{R})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale. Calculer explicitement la matrice diagonale $P^{-1}AP$

Exercice 5. Étudier la diagonalisabilité sur $\mathbb{R}$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

En cas de diagonalisabilité, diagonaliser explicitement cette matrice (on pourra remarquer que 4 est valeur propre de la matrice A).

Exercice 6.
1) Rappeler la définition d'un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E
2) Déterminer si les applications suivantes définissent une structure de produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$:

(i) $\langle x, y\rangle = \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = x_1y_1 + 3y_2^2 + 2x_3y_3$
(ii) $\langle x, y\rangle = \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 4x_3y_3$

où $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$