Université de Cergy-Pontoise
Licence 2, cours MS4IP
Année 2011/2012

Examen final (3h)

Notes de cours manuscrites autorisées. Livres, photocopies, calculatrices ou appareils électroniques interdits. Veuillez numéroter et indiquer votre numéro d'étudiant sur toutes les feuilles rendues. Justifier toutes vos réponses

Exercice 1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer la matrice A^2
2) Déterminer deux nombres réels $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = \lambda A + \mu I_3$, où I_3 désigne la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$
3) Rappeler la définition d'une matrice inversible
4) En déduire que la matrice A est inversible et calculer explicitement son inverse A^{-1}

Exercice 2. Soient $a_1 < a_2 < ... < a_n$ des réels distincts, E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout $1 \leq j \leq n$,

$$f_j : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{a_j e^x}. \end{array}$$

1) Rappeler quelle est la structure d'espace vectoriel définie sur E en précisant le sens donné à l'addition des applications et à la multiplication par un scalaire
2) Montrer que le système $(f_1, f_2, ..., f_n)$ est libre dans E

Exercice 3. On considère le déterminant de taille $n \times n$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & b & b & b & b & ... & b \\ b & a+b & b & b & b & ... & b \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ b & ... & b & b & b & a+b & b \\ b & ... & b & b & b & b & a+b \end{vmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

1) Justifier

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+nb & b & b & \dots & b & \dots & b \\ a+nb & a+b & b & \dots & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+nb & b & b & \dots & b & a+b & b \\ a+nb & b & b & \dots & b & b & a+b \end{vmatrix}$$

2) Montrer

$$\Delta_n = (a+nb)a^{n-1}$$

Exercice 4. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1).$$

On considère le système de vecteurs $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ défini par

$$e'_1 = e_1 + e_3, \quad e'_2 = e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

1) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$
2) Calculer les matrices de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$
3) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est donnée par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer explicitement l'application linéaire f
4) Calculer explicitement les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} f$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} f$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} f$

Exercice 5. On considère la matrice suivante de $M_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que 1, 2, -4 sont valeurs propres de la matrice A
2) Justifier le fait que la matrice A soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$
3) Déterminer explicitement P une matrice inversible de $M_3(\mathbb{R})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale. Calculer explicitement la matrice diagonale $P^{-1}AP$

Exercice 6. Étudier la diagonalisabilité sur $\mathbb{R}$ de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En cas de diagonalisabilité, diagonaliser explicitement cette matrice (on pourra remarquer que -1 est valeur propre de la matrice A).