Université de Cergy-Pontoise
Licence 2, cours MS4
Année 2010/2011

Examen final

Documents et calculatrices interdits. Justifier toutes vos réponses

Exercice 1. Soit E l'ensemble des matrices de la forme

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3c & a-3c & b \\ 3b & -3b+3c & a-3c \end{pmatrix}$$

où a, b, c sont des nombres réels.
1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_3(\mathbb{R})$
2) Donner une base du sous-espace vectoriel E et calculer sa dimension

Exercice 2. Soient a, b, c trois nombres complexes et f l'endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

1) Soient $e_1' = e_1 + e_2 + e_3$, $e_2' = e_2$ et $e_3' = e_3$. Montrer que $\mathcal{C} = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de $\mathbb{C}^3$
2) Calculer explicitement la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}} f$ de l'endomorphisme f relativement à la base $\mathcal{C}$

Exercice 3. On considère la matrice suivante de $M_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que $\det A = -1$
2) En déduire que cette matrice est inversible et calculer son inverse A^{-1}
3) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^{2n} = I_3 \text{ et } A^{2n+1} = A,$$

où I_3 désigne la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$

Exercice 4. On considère la matrice suivante de $M_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que $1, 2, -4$ sont valeurs propres de la matrice A
2) Justifier que le fait que la matrice A soit diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$
3) Déterminer explicitement P une matrice inversible de $M_3(\mathbb{R})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale

Exercice 5. On considère la matrice suivante de $M_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$? Justifier votre réponse. On pourra remarquer que $-(X-3)(X-2)^2 = -X^3 + 7X^2 - 16X + 12$

Exercice 6.
1) Donner un exemple d'espace euclidien de dimension $n \geq 1$ en précisant la structure euclidienne, i.e., en explicitant le produit scalaire considéré. Donner un exemple de base orthonormée pour cet espace euclidien
2) Soient E un espace euclidien et $\mathcal{C} = (x_1, x_2, ..., x_p)$ un système orthogonal de vecteurs non nuls de E. Rappeler la définition d'un système orthogonal de vecteurs et démontrer que le système $\mathcal{C}$ est nécessairement libre
3) Rappeler la définition d'une matrice orthogonale $P \in M_n(\mathbb{R})$ et montrer que son déterminant vérifie

$$\det P \in \{1, -1\}$$

4) Soient E l'espace vectoriel des fonctions continues sur [-1/2,1/2] à valeurs réelles muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)g(t)dt$$

et $f_0 = 1$ la fonction identiquement égale à 1. Donner un exemple d'élément non nul g_0 tel que $\mathcal{C} = (f_0, g_0)$ soit un système orthonormé de E