Université de Cergy-Pontoise, L2, année 2009/2010
Cours de math (T. Banica - M. Degand), examen du 19/02

11h–13h, documents admis, calculettes interdites
Barême, corrigé, retour copies: à préciser ultérieurement
Note = 1/3 de la note finale (si $\geq$ note exam final)

---

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On pose $u = (0, 0, a)$, $v = (0, b, 1)$, $w = (1, 2, 3)$ (vecteurs de $\mathbb{R}^3$).
(1) Pour quelles valeurs de a, b la famille $\{u, v, w\}$ est-elle libre?
(2) Pour quelles valeurs de a, b les vecteurs u, v, w engendrent-ils $\mathbb{R}^3$?
(3) Pour quelles valeurs de a, b l'ensemble $\{u, v, w\}$ est-il une base de $\mathbb{R}^3$?

2. Soient $P = 1 + X + X^2$, $Q = X$, $R = 1 + X^2$ (polynômes dans $\mathbb{R}[X]$).
(1) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel E engendré par P, Q, R?
(2) Trouver une base de E.
(3) Peut-changer R afin d'augmenter la dimension de E?

3. Soient $p = (0, 1, 0, 1)$ et $q = (1, 2, 1, 2)$ (points de $\mathbb{R}^4$).
(1) Decrire l'espace vectoriel E engendré par p, q.
(2) Trouver un supplémentaire F de E (dans $\mathbb{R}^4$).
(3) Trouver une fonction linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ayant F comme noyau.

4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, qui dépend de $a \in \mathbb{R}$.
(1) Calculer le détérminant et le polynôme caractéristique de A.
(2) Calculer les valeurs propres de A, vue comme matrice réelle.
(3) Calculer les valeurs propres de A, vue comme matrice complexe.

5. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
(1) Calculer le détérminant et le polynôme caractéristique de B.
(2) Cette matrice B est-elle diagonalisable?
(3) Calculer les puissances de B.

$\Longrightarrow$ Ecrire lisiblement nom-prenom sur la 1^{ere} page, justifier toutes les réponses