Université de Cergy-Pontoise, L2, année 2009/2010
Cours de math (T. Banica - M. Degand), examen du 11/05/10
14h–17h, documents admis, calculettes interdites

---

1. Soient $P = 1 + X + X^3$, $Q = X$, $R = 1 + X^3$ (polynômes dans $\mathbb{R}[X]$).

(1) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel E engendré par P, Q, R?
(2) Trouver une base de E. Trouver ensuite toutes les bases de E.
(3) Mêmes questions, mais avec $R = 1 + aX^3$, avec $a \in \mathbb{R}$.

2. Soient $x = (1, 1, 1, 1)$ et $y = (1, 2, 3, 4)$ (points de $\mathbb{R}^4$).

(1) Decrire l'espace vectoriel E engendré par x, y.
(2) Trouver un supplémentaire F de E (dans $\mathbb{R}^4$).
(3) Trouver une fonction linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ayant F comme noyau.

3. On considère la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que A est une matrice orthogonale.
(2) Calculer le détérminant et le polynôme caractéristique de A.
(3) Calculer les valeurs propres de A. Cette matrice est-elle diagonalisable?

4. On considère l'espace de probas $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, avec la mesure uniforme.

(1) Calculer l'espérance et la variance de la variable $f(i) = i$.
(2) Calculer l'espérance et la variance de la variable $f(i) = i^2$.
(3) Mêmes questions, mais avec X muni de la mesure $\mu(i) = i/15$, pour tout i.

5. On considère la fonction $\gamma : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ donnée par $\gamma(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2}$.

(1) Montrer que $\int_{-2}^{2} \gamma(x)dx = 1$. Soit f une variable aléatoire ayant γ comme densité.
(2) Calculer l'espérance et la variance de f.
(3) Montrer que les moments de f sont des entiers.

$\Longrightarrow$ justifier toutes les réponses