Université de Cergy - 2008-2009 - S4 IP - Mathématiques

Examen

I) Soit m un paramètre réel. Soit la matrice $A_m = \begin{pmatrix} m & m-1 & m-1 \\ m & m & m \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de A_m.

b) Montrer que A_m est diagonalisable si $m \neq 0$ et $m \neq \frac{1}{2}$.

c) La matrice A_0 est-elle diagonalisable?

d) Soit $m = \frac{1}{2}$. Mettre $A_{\frac{1}{2}}$ sous forme triangulaire T, en précisant le changement de base.

e) Calculer e^{tT}.

f) Résoudre le système différentiel $X'(t) = A_m X(t)$, lorsque $m = \frac{1}{2}$ et lorsque $m = 0$.

II) Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur [-1,1], à valeurs réelles. Pour $f, g \in E$ on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

a) Montrer que ceci a bien un sens et définit sur E un produit scalaire.

b) Vérifier que $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$, $\int_{-1}^{1} x^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$, $\int_{-1}^{1} x^4 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3\pi}{8}$.
Indication: on pourra faire le changement de variable $x = \sin\theta$.

c) Soit F le sous espace de E engendré par $1, x, x^2$. En utilisant le procédé de Schmidt, donner une base de F orthogonale pour ce produit scalaire.

d) Soit P_F la projection orthogonale: $E \to F$. Calculer $P_F(x^3)$.
Indication: On vérifiera que $P_F(x^3)$ est colinéaire à x.

e) Soit G le sous espace de E engendré par F et x^3. On note $F^\perp$ l'orthogonal de F dans G. Donner la dimension de $F^\perp$ et déduire de d) une base de ce sous espace.

III) $\mathbb{R}^4$ est muni de sa base canonique. On note x, y, z, t les coordonnées d'un vecteur $X \in \mathbb{R}^4$. Soit la forme quadratique

$$q(X) = x^2 + 3y^2 + 7z^2 + 13t^2 + 2xy + 2xz + 2xt - 2yz + 10yt - 14zt.$$

a) Appliquer à q une décomposition de Gauss.

b) La forme bilinéaire symétrique f associée à q définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^4$?

c) Ecrire la matrice A de f dans la base canonique. Exprimer $f(X, X')$ en fonction de A.

d) Montrer sans calculs que A admet la valeur propre $\lambda = 0$ et 3 valeurs propres strictement positives.

e) Soit F une fonction: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dont le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 est

$$F(x, y, z, t) = 3 + q(x, y, z, t) + (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)\varepsilon(x, y, z, t),$$

où $\varepsilon(x, y, z, t) \to 0$ si $X \to 0$. F admet-elle un extremum local à l'origine?