MS4-I
5 Juin 2008
Durée 2 heures

Examen de Mathématiques, session 2

Calculatrice et document sont interdits. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre que l'on veut et ne sont pas rangés par difficulté croissante. Barème indicatif :6+6+8

Exercice 1 : Matrice symétrique

Soit A la matrice suivante :

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P orthogonale telle que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 2 : Variables aléatoires discrètes

Soit X une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ, on rappelle que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad \text{et que} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

1. Déterminer la fonction génératrice de X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
3. Calculer la variance de X.

Exercice 3 : Chaînes de Markov

Une urne contient 3 boules qui peuvent être noires ou blanches, on en tire 2 au hasard. Si elles ont la même couleur, on remet l'une des deux et une noire dans l'urne, si elles n'ont pas la même couleur on remplace la troisième boule (celle qui est restée dans l'urne) par une boule blanche. Ainsi l'urne contient toujours trois boules.

1. Justifier rapidement que l'on peut modéliser le nombre de boules blanches dans l'urne par une chaîne de Markov (X_n).
2. Représenter le graphe de transition et la matrice de transition de cette chaîne de Markov.
3. Déterminer deux mesures invariantes différentes pour cette chaîne de Markov.
4. Peut-on appliquer le théorème de Perron Frobenius à cette chaîne de Markov ? On justifiera la réponse.
5. On suppose dans cette question qu'au départ il n'y a que des boules blanches, montrer que la suite de variables aléatoires converge en loi vers une loi que l'on déterminera. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n)$.