MS4-I
Mai 2008
Durée 3 heures

Examen de Mathématiques

Calculatrice et document sont interdits, seule une table de loi normale est autorisée. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre que l'on veut et ne sont pas rangés par difficulté croissante. Barème indicatif :6+4+6+6

Exercice 1 : Espace euclidien

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, on pose

$$\forall P, Q \in E, \ < P, Q >= \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

On admet que $< \cdot, \cdot >$ définit un produit scalaire sur E.

1. Soient les fonctions définies par $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, montrer que P_0 et P_1 sont orthogonaux, calculer leur norme.
2. Déterminer un polynôme P de degré 2 orthogonal à P_0 et à P_1 et tel que $P(1) = 1$.
3. Parmi toutes les fonctions affines (de la forme $h(X) = \alpha X + \beta$), quelle est celle qui est "la plus proche" de la fonction définie par $g(X) = X^4$, au sens de la norme associée à $< \cdot, \cdot >$.
4. Montrer que $\forall P, Q \in E, \ < XP, Q >=< P, XQ >$.
5. Soit $(P_n)_n$ une suite de polynômes qui sont orthogonaux deux à deux pour le produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ et tels que P_n soit de degré n pour tout n. On rappelle que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ forme une base du sous espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
   (a) Quel est le degré de XP_n ?
   (b) Montrer que $< XP_n, X^k >= 0$ pour tout $k \leq n-2$.
   (c) Montrer qu'il existe des réels a_n, b_n et c_n tel que $XP_n = a_n P_{n+1} + b_n P_n + c_n P_{n-1}$.

Exercice 2 : Variables aléatoires discrètes

On jette un dé, et on s'intéresse au nombre de jets nécessaire pour qu'un 6 apparaisse, on modélise ce nombre à l'aide d'une variable aléatoire N.

1. Quelle loi peut-on choisir pour N ?
2. Déterminer la fonction génératrice de N. On pourra utiliser l'expression de la somme d'une série géométrique.
3. Calculer $\mathbb{E}(N)$.

Exercice 3 : Variables aléatoires à densité

Soient α un réel positif et X une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} K(\alpha^2 - x^2) & \text{si} \quad x \in [-\alpha; \alpha] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Représenter f.
2. Déterminer K en fonction de α.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.
4. Déterminer la densité de $|X|$.
5. Dans cette question on suppose que $\alpha = 1$. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X, déterminer une valeur approchée de

$$\beta = P\left(\sum_{k=1}^{125} X_n \geq 10\right)$$

Tourner la page SVP

Exercice 4 : Chaînes de Markov

Une urne contient 3 boules qui peuvent être noires ou blanches, on en tire 2 au hasard. Si elles ont la même couleur, on remet l'une des deux et une blanche dans l'urne, si elles n'ont pas la même couleur on remplace la troisième boule (celle qui est restée dans l'urne) par une boule noire.

1. Justifier rapidement que l'on peut modéliser le nombre de boules blanches par une chaîne de Markov (X_n).
2. Représenter le graphe de transition et la matrice de transition de cette chaîne de Markov.
3. Déterminer deux mesures invariantes différentes pour cette chaîne de Markov.
4. Peut-on appliquer le théorème de Perron Frobenius à cette chaîne de Markov ? On justifiera la réponse.
5. On suppose dans cette question qu'au départ il n'y a que des boules noires, montrer que la suite de variables aléatoires converge en loi vers une loi que l'on déterminera. Calculer $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n)$.