Examen de mathematiques 29 Avril 2025.

Exo 1 : (E1) EDO lineaire d'ordre 2 $\quad (E_1') : y''-y'+y=0 \quad P(X)=X^2-X+1$

$\Delta = 1-4=-3=(\sqrt{3}\,i)^2 \quad r=\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$ sol de $(E'_1) : y(x)=e^{\frac{1}{2}x}\left(K_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+K_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

Sol particulière Ke^{2x} $\quad 4K-2K+K=1$ donc $K=\frac{1}{3}$.

Sol de (E_1) : $y(x)=\frac{1}{3}e^{2x}+e^{x/2}\left(K_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+K_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

(E2) EDO lineaire d'ordre 1, sans second membre.

$(E_2) \iff \frac{y'}{y}=\frac{1}{x(1+x)}=\frac{1}{x}+\frac{-1}{1+x}$

$\ln|y|=\ln|x|-\ln|1+x|+C \qquad |y|=e^C\left|\frac{x}{1+x}\right|$ d'où $y(x)=K\frac{x}{x+1}$ avec $K\in\mathbb{R}$

sur les 3 intervalles $]-\infty;-1[$ ou $]-1,0[$ ou $]0;+\infty[$.

$y(1)=2$, sur l'intervalle $]0,+\infty[$ $\quad y(x)=\frac{4x}{x+1}\ \forall x\in]0;+\infty[$.

Exo 2 : $\text{Rot}(\text{grad}\,\varphi)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\end{pmatrix}=0$ D'après le théorème de Schwartz

2.2 : On doit avoir $\text{Rot}(\nabla\varphi)=0$ donc $\begin{pmatrix}2z-2z\\ 0-0\\ e^{ax}+(a+ax)e^{ax}-(b+2x)e^{ax}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

donc $(1+a-b)+(a-2)x=0$ donc $a=2$ et $b=3$.

$$\begin{cases}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=(3y+2xy)e^{2x}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=(1+x)e^{2x}+z^2\\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=2yz \quad (*)\end{cases}$$

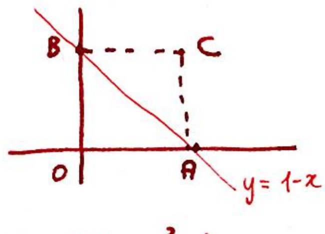
Donc $\varphi(x;y;z)=yz^2+K(x;y)$ en integrant (*) en z à x et y fixés.

$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=z^2+\frac{\partial K}{\partial y}(x;y)=(1+x)e^{2x}+z^2$ donc $\frac{\partial K}{\partial y}(x,y)=(1+x)e^{2x}$ donc $K(x,y)=(1+x)ye^{2x}+C(x)$

$\varphi(x,y,z)=yz^2+(1+x)ye^{2x}+C(x)$

$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=ye^{2x}+(2+2x)ye^{2x}+C'(x)=(3y+2xy)e^{2x}$ donc $C'(x)=0$ donc C est une cte.

les solutions sont donc $\underline{\varphi(x,y,z)=yz^2+(1+x)y\,e^{2x}+C}$



Exo 3 : $\frac{1}{\sigma}J_1=\iint_{OAB}x^2+y^2\,dx\,dy \overset{\text{Fubini}}{=\!=} \int_0^1\int_0^{1-x}x^2+y^2\,dy\,dx$

$=\int_0^1 x^2-x^3+\frac{1}{3}(1-x)^3\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{12}(1-x)^4\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$.

$\frac{1}{\sigma}J_2=\int_0^1\int_{1-x}^1 x^2+y^2\,dy\,dx=\int_0^1 x^2\left(1-(1-x)\right)+\frac{1}{3}\left(1-(1-x)^3\right)dx=\int_0^1 x^3+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-x)^3\,dx$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{7}{12}-\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$.

Exo 3.3 : a) $F(0) = (0,0)$ $\quad F'(0) = (1;1)$ $\quad$ tangente d'equation $y = x$

$F(1) = (0,0)$ $\quad F'(1) = (-2;-1)$ $\quad$ tangente d'equation $x = 2y$

b) $y(t) = t - t^2 \quad y'(t) = 1 - 2t$

t	0		$1/2$		1
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$y(t)$ est maximal pour $t = \frac{1}{2}$.

$(x_M ; y_M) = \left(\frac{3}{8} ; \frac{1}{4}\right)$

c) $\frac{1}{\pi} I_3 = \iint_D x^2 + y^2 \, dx\, dy = \int_{\partial D^+} \frac{1}{3}x^3 + xy^2 \, dy$ d'après la formule de Green Riemann.

$$= -\int_0^1 \underbrace{\left[\frac{1}{3}(t-t^3)^3 + (t-t^2)(t-t^3)^2\right](1-2t)}_{f(t).} dt.$$

Exo 4 : Δ_1 est un demi cercle de centre O, de rayon 1 et d'extremité $(0,0,-1)$ et $(0,0,1)$ inclus dans le plan d'equation $y = x$.

Δ_2 est inclus dans le plan horizontale Oxy car $\varphi = \frac{\pi}{2}$ avec la condition $\theta = \frac{\pi}{2}$ on trouve la demi droite $(y \geq 0 ; x = 0 ; z = 0)$ demi droite $[O ; B]$ avec $B = (0;1;0)$.

Δ_3 : $\theta = \frac{\pi}{4}$ se trouve dans le plan verticale $y = x$.

$\varphi = \frac{\pi}{4}$ correspond a un cone de centre O.

Δ_3 est une demi droite $[OC[$ avec $C : (1; 1; \sqrt{2})$.

2. $\varphi = \theta$ n'est pas incluse dans un plan, sinon ce serait le plan (OBC) d'equation $ax + by + cz = 0$ or B lui appartient donc $b = 0$ et C aussi donc $a = -\sqrt{2}c$

équation $-\sqrt{2}x + z = 0$.

pour $\varphi = \frac{3\pi}{4} = \theta$ on a $x > 0$ et $z < 0$ donc ne verifie pas $-\sqrt{2}x + z = 0$.