L2&Pré-Ing2 GC
Durée de l'épreuve : 1,5 heures
Barème indicatif : 6+4+7+3

Examen de Mathématiques, 29 avril 2025

Les documents sont interdits à l'exception d'une feuille A4 recto, manuscrite, au choix de l'étudiant. L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices, les téléphones et tout objet connecté en particulier les montres doivent être éteints et rangés dans un sac fermé.

Exercice 1: Résoudre les équations différentielles :

$$(E_1) : y'' - y' + y = e^{2x}$$
$$(E_2) : (x + x^2)y' - y = 0 \quad \text{vérifiant} \quad y(1) = 2$$

Exercice 2:

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un champ scalaire, montrer que le rotationnel du gradient de φ est le vecteur nul.
2. Déterminer deux réels a, b et un champ scalaire φ tel que $\nabla\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} (by + 2xy)e^{ax} \\ (1 + x)e^{ax} + z^2 \\ 2yz \end{pmatrix}$

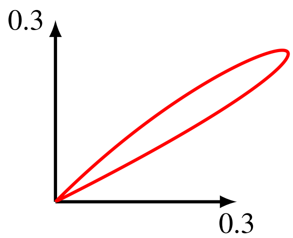
Exercice 3: Le moment d'inertie d'une plaque homogène D de densité surfacique constante σ par rapport à un point $P : (x_P, y_P)$ est défini par

$$J = \iint_D \left((x - x_P)^2 + (y - y_P)^2\right)\sigma \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Soit $O; A, B, C$ les points de coordonnées $O : (0; 0)$; $A : (1; 0)$; $B : (0; 1)$; $C : (1; 1)$.

1. Déterminer le moment d'inertie J_1 d'une plaque triangulaire homogène de sommets O, A, B, de densité surfacique σ, par rapport au point O.
2. Déterminer le moment d'inertie J_2 d'une plaque triangulaire homogène de sommets A, B, C, de densité surfacique σ, par rapport au point O.

3. Soit Γ la courbe paramétrée par $F(t) = (t - t^3, t - t^2)$, pour $t \in [0; 1]$, représentée ci contre.
   (a) Déterminer les deux demi tangentes à Γ en $(0; 0)$.
   (b) Déterminer les coordonnées (x_M, y_M) du point M de Γ d'ordonnée maximale, $y_M = \max\{y \in \mathbb{R}/(x; y) \in \Gamma\}$.
   (c) On note D le domaine entouré par Γ, et J_3 le moment d'inertie par rapport à O, d'une plaque homogène de forme D et de densité surfacique σ.
   Déterminer une fonction $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ telle que $J_3 = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour ne pas se perdre dans de longs calculs, on ne calculera pas J_3, on se limitera à déterminer $f(t)$ telle que $J_3 = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.



Exercice 4: On se place en coordonnées sphériques (ρ, φ, θ).

1. Décrire géométriquement $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ d'équation :

$$\Delta_1 : \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{1}{4}\pi \end{cases} \qquad \Delta_2 : \begin{cases} \varphi = \frac{1}{2}\pi \\ \theta = \frac{1}{2}\pi \end{cases} \qquad \Delta_3 : \begin{cases} \varphi = \frac{1}{4}\pi \\ \theta = \frac{1}{4}\pi \end{cases}$$

2. La surface d'équation $\varphi = \theta$ est-elle incluse dans un plan ? Justifier.