Examen de Mathematiques S4GC _ 23 Avril 2024.

Exo 1 : (E_1) est une ED linéaire d'ordre 3 à coef constant.

Polynôme caractéristique $P(X) = X^3 + X^2 - X - 1$ or $P(1) = 0$ $\quad P(X) = (X-1)(X^2+2X+1) = (X-1)(X+1)^2$

(E_1') : $y''' + y'' - y' - y = 0$ a pour solution $y(x) = (K_1 + xK_2)e^{-x} + K_3 e^{x}$

On cherche une solution de la fonct Ke^{2x} $\quad z''' + z'' - z' - z = (8+4-2-1)Ke^{2x} = 9Ke^{2x}$

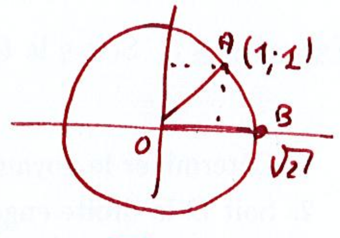
donc z est solution ssi $K = \frac{1}{9}$. Les solutions de (E_1) sont $y(x) = \frac{1}{9}e^{2x} + (K_1 + xK_2)e^{-x} + K_3 e^{x}$

(E_2) Equation differentielle non lineaire à variable separables.

$(E_2) \Longleftrightarrow \frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x+1}$ on intègre $-\frac{1}{y(x)} = \ln(x+1) + C$ d'où $y(x) = \frac{-1}{C + \ln(x+1)}$

$y(0) = 1$ donc $C + \ln(0+1) = -1$ donc $C = -1$ $\quad y(x) = \frac{1}{1 - \ln(1+x)}$.

Exo 2 : On va effectuer un changt de varble en coordonnées polaire.



$$I = \iint_D \frac{y}{x^2}\,dx\,dy = \iint_{\substack{0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \\ 0 \le r \le \sqrt{2}}} \frac{r\sin\theta}{(r\cos\theta)^2}\, r\, dr\, d\theta \overset{\text{Fubini}}{=\!=\!=} \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta \right) dr$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta = \sqrt{2}\left[\frac{+1}{\cos\theta} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left[+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 1 \right] = 2 - \sqrt{2}.$$

J, on peut appliquer la formule de Green Riemann avec $P = \frac{y^2}{x^2}$ et $Q = \frac{y}{x}$.

$$J = \int_\gamma \frac{y^2}{x^2}dx + \frac{y}{x}dy = -\int_{\partial D^+} \frac{y^2}{x^2}dx + \frac{y}{x}dy = -\iint_D -\frac{y}{x^2} - \frac{2y}{x^2}\,dx\,dy \quad \text{car } \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{y}{x^2};\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2y}{x^2}.$$

donc $J = 3\iint_D \frac{y}{x^2}\,dx\,dy = 3I = 6 - 3\sqrt{2}$

Exo 4 : $\varphi(M) = 0$.

1) Soit N un point proche de M

$\varphi(N) = \varphi(M) + \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi(M) \cdot \overrightarrow{MN} + o(\|\overrightarrow{MN}\|)$

$= \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi(M) \cdot \overrightarrow{MN} + o(\|\overrightarrow{MN}\|) \simeq \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi(M) \cdot \overrightarrow{MN}$

$N \in \Sigma \Longleftrightarrow \varphi(N) = 0$ en première approximation cela correspond à $\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi(\Pi) \perp \overrightarrow{MN}$.

à $\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi(\Pi) \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ ce qui revient à $\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi(\Pi)$ est orthogonale à tout vecteur $\overrightarrow{\Pi N}$ pour N infinit proche de Π.

2) Im F est une courbe incluse dans Σ $\quad F(t) = (F_1(t); F_2(t); F_3(t))$.

$F(t) \in \Sigma$ donc $\varphi(F_1(t); F_2(t); F_3(t)) = 0$ en derivant on obtient

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(F(t)) \cdot F_1'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(F(t)) \cdot F_2'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(F(t)) \cdot F_3'(t) = 0$ donc $\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi(F(t)) \perp F'(t)$.

3) $(1;2;3) = G_1(1) = G_2(0)$ d'après 2 $\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi(M) \perp G_1'(1)$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi(\Pi) \perp G_2'(0)$ si $G_1'(1); G_2'(0)$ ne sont pas colineaire ils forment une base du plan tangent à Σ en $\Pi = (1;2;3)$.

Exo 4 (Suite)

$G_1'(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4u \\ -2u \end{pmatrix}$ $\quad G_1'(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad G_2'(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6e^{2v} \end{pmatrix}$ $\quad G_2'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan tangent en Π, l'équation de Π est donc $26(x-1) - 6(y-2) + (z-3) = 0$.

Exo 3 :

1)
$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\Psi = \frac{1}{\rho\sin\varphi}\left(\frac{\partial(\rho^m \sin\theta\sin\varphi)}{\partial\varphi} - \frac{\partial(\rho^m\cos\varphi\cos\theta)}{\partial\theta} \right)\vec{u}_\rho + \left(\frac{1}{\rho\sin\varphi} 2\rho^m\sin\varphi(-\sin\theta) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(-\rho^{m+1}\sin\theta) \right)\vec{u}_\varphi$$
$$+ \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^{m+1}\cos\varphi\cos\theta) - \frac{1}{\rho}\, 2\, \rho^m \cos\varphi\cos\theta \right)\vec{u}_\theta$$
$$= \left(\frac{-\rho^{m-1}\sin\theta\cos\varphi}{\sin\varphi} + \frac{\rho^{m-1}\cos\varphi\sin\theta}{\sin\varphi} \right)\vec{u}_\rho + \left(-2\rho^{m-1}\sin\theta + (m+1)\rho^{m-1}\sin\theta \right)\vec{u}_\varphi$$
$$+ \left((m+1)\rho^{m-1}\cos\varphi\cos\theta - 2\rho^{m-1}\cos\varphi\cos\theta \right)\vec{u}_\theta = \rho^{m-1}\left[\left((m-1)\sin\theta \right)\vec{u}_\varphi + (m-1)\cos\varphi\cos\theta\,\vec{u}_\theta \right]$$
$$= (m-1)\rho^{m-1}\left(\sin\theta\,\vec{u}_\varphi + \cos\varphi\cos\theta\,\vec{u}_\theta \right).$$

2) $\overrightarrow{\text{rot}}\,\Psi = \vec{0}$ ssi $m+1 = 2$ ssi $m = 1$.

3) Pour $m = 2$ $\quad \text{rot}\,\Psi \neq 0$ il n'existe donc pas de potentiel scalaire. car $\text{rot}(\text{grad}\,\gamma) = 0$.

4) On cherche γ tel que
$$\begin{cases} \frac{\partial\gamma}{\partial\rho} = 2\rho\sin\varphi\cos\theta & (L_1) \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi} = \rho\cos\varphi\cos\theta & (L_2) \\ \frac{1}{\rho\sin\varphi}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta} = -\rho\sin\theta & (L_3) \end{cases}$$

de (L_1) on tire $\gamma(\rho, \varphi, \theta) = \rho^2\sin\varphi\cos\theta + K(\varphi, \theta)$.

de (L_2) ——— $\frac{1}{\rho}\rho^2\cos\varphi\cos\theta + \frac{\partial K}{\partial\varphi} = \rho\cos\varphi\cos\theta$

donc $\frac{\partial K}{\partial\varphi} = 0$ donc $K(\varphi, \theta) = C(\theta)$.

de (L_3) on tire $\frac{1}{\rho\sin\varphi}\left(-\rho^2\sin\varphi\sin\theta + \frac{dC}{d\theta} \right) = -\rho\sin\theta$

donc $C'(\theta) = 0$. donc C est une constante et

$\gamma(\rho; \varphi; \theta) = \rho^2\sin\varphi\cos\theta + C$.