L2&Pré-Ing2 GC
Durée de l'épreuve : 1,5 heures
Barème indicatif : 6+6+4+4

Examen de Mathématiques, 23 avril 2024

Les documents sont interdits à l'exception d'une feuille A4 recto, manuscrite, au choix de l'étudiant. L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices, les téléphones et tout objet connecté en particulier les montres doivent être rangés dans un sac et éteints.

Exercice 1: Résoudre les équations différentielles :

$$(E_1) : y''' + y'' - y' - y = e^{2x}$$

$$(E_2) : (1+x)y' - y^2 = 0 \quad \text{et} \quad y(0) = 1$$

Exercice 2: On note D le huitième de disque de centre $O = (0;0)$ de rayon $\sqrt{2}$, et ayant pour extrémités $A = (1;1)$ et $B = (\sqrt{2};0)$ et γ le chemin allant en ligne droite de B à O puis de O à A et enfin qui suit le huitième de cercle de centre O allant de A à B dans le sens horaire.

1. Calculer l'intégrale double $I = \iint_D \frac{y}{x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
2. En déduire la circulation $J = \int_\gamma \frac{y^2}{x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{x}\,\mathrm{d}y$.

Exercice 3: On rappelle qu'en coordonnées sphériques le gradient et le rotationnel s'écrivent

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}\overrightarrow{u_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi} + \frac{1}{\rho \sin\varphi}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

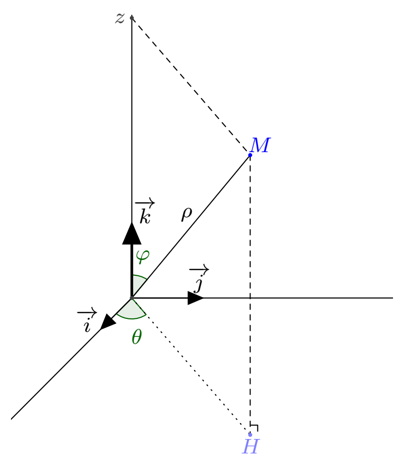
Si $\Psi = \Psi_\rho\,\overrightarrow{u_\rho} + \Psi_\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi} + \Psi_\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\Psi = \frac{1}{\rho\sin\varphi}\Big(\frac{\partial(\Psi_\theta \sin\varphi)}{\partial\varphi} - \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial\theta}\Big)\overrightarrow{u_\rho} + \Big(\frac{1}{\rho\sin\varphi}\frac{\partial\Psi_\rho}{\partial\theta} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\Psi_\theta)}{\partial\rho}\Big)\overrightarrow{u_\varphi} + \Big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\Psi_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi_\rho}{\partial\varphi}\Big)\overrightarrow{u_\theta}$$

Soit m un entier et Ψ le champ vectoriel défini en coordonnées sphériques par :

$$\Psi = 2\rho^m \sin\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{u_\rho} + \rho^m\cos\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{u_\varphi} - \rho^m\sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$$

1. Calculer le rotationnel de Ψ.
2. Pour quelle valeur de m, ce rotationnel est-il nul ?
3. Pour $m = 2$, existe-t-il un potentiel scalaire de Ψ c'est à dire un champ scalaire γ telle que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\gamma = \Psi$?
4. Pour $m = 1$, déterminer un potentiel scalaire de Ψ c'est à dire un champ scalaire γ telle que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\gamma = \Psi$. On effectuera tous les calculs en coordonnées sphériques.



Exercice 4: Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et Σ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\varphi = 0$ c'est à dire $\Sigma = \{X \in \mathbb{R}^3 / \varphi(X) = 0\}$ et $M \in \Sigma$.

1. On suppose que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi(M) \neq \vec{0}$, expliquer pourquoi $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi(M)$ est un vecteur orthogonal à Σ en M.
2. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dérivable, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F(t) \in \Sigma$ et $F(0) = M$. Démontrer que $F'(0) \perp \overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi(M)$ et interpréter ce résultat.
3. Soit $G_1(u) = (u; 2u^2; 4 - u^2)$ et $G_2(v) = (1; v+2; 3e^{2v})$, on suppose que pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, $G_1(u) \in \Sigma$ et $G_2(v) \in \Sigma$, déterminer une équation de Π le plan tangent à Σ au point $M = (1;2;3)$.