L2&Pré-Ing2 GC
Durée de l'épreuve : 1,5 heures
Barème indicatif : 6+6+3+5

Examen de Mathématiques S4 session 2, juin 2023

Les documents sont interdits à l'exception d'une feuille A4 , manuscrite, au choix de l'étudiant. L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et <u>éteints</u>.

Exercice 1 : Équations différentielles

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$(E_1)\ :\ y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x$ $\qquad$ $(E_2)\ :\ \begin{cases} (x+1)(x+2)y'(x) + y^2(x) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

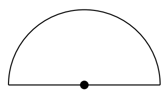
Exercice 2 : Opérateurs différentiels

1. Pour un champ scalaire de $\mathbb{R}^2$: φ et un champ vectoriel $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, nommer les différents opérateurs différentiels et démontrer la formule :
$$\nabla \cdot (\varphi \Psi) = \varphi\ \nabla \cdot \Psi + (\nabla \varphi) \cdot \Psi$$
2. Expliciter chacun des termes de la formule dans le cas où $\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\Psi(x, y) = (x, y)$.
3. Dans le cas particulier où la divergence de Ψ est nulle, à quelle condition sur φ, la divergence de $\varphi\Psi$ est-il nul ?

Exercice 3 :

On appelle moment d'inertie d'un solide S par rapport à un axe Δ la quantité $M_\Delta = \iiint d(M, \Delta)^2 \rho(M)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, où $d(M, \Delta)$ est la distance entre le point M de coordonnées (x, y, z) et la droite Δ, et $\rho(M)$ la masse volumique au point M. Dans le cas d'une plaque homogène D de masse surfacique ρ se trouvant dans un plan $\mathcal{P}$, lorsque Δ est orthogonal à $\mathcal{P}$ et que $\Delta \cap \mathcal{P} = H$ on a $M_\Delta = \iint_D MH^2 \rho\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, où ρ est la masse surfacique de la plaque homogène (c'est donc une constante en $kg.m^{-2}$)

Calculer le moment d'inertie M_Δ d'une plaque homogène de la forme d'un demi-disque de rayon R, de masse surfacique ρ, par rapport à un axe orthogonal passant par le centre du disque.



Exercice 4 :

Soit a, b deux fonctions continues et (E) l'équation différentielle : $2y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y(x)^3 = 0$

1. L'équation (E) est-elle linéaire ?
2. Soit y une fonction qui ne s'annule pas, on pose $z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$, déterminer une équation différentielle linéaire (F) d'ordre 1 telle que
$$y \text{ est solution de } (E) \iff z \text{ est solution de } (F)$$
3. Application : On cherche à résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\ 2y' + 2xy + xy^3 = 0$
   (a) Utiliser la méthode précédente pour se ramener à une équation différentielle linéaire (F).
   (b) Résoudre l'équation différentielle sans second membre (F') associée à (F).
   (c) Résoudre l'équation différentielle (F).
   (d) Résoudre (E).