L2&Pré-Ing2 GC
Durée de l'épreuve : 1,5 heures
Barème indicatif : 4+4+6+6

Examen de Mathématiques, 9 mai 2023

Les documents sont interdits à l'exception d'une feuille A4 , manuscrite, au choix de l'étudiant. L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints.

Exercice 1 : Équations différentielles

Résoudre l'équation différentielle et l'EDP suivantes : $(E_1)\ :\ 2y'' - 5y' + 3y = 1$ $\qquad (E_2)\ :\ \begin{cases} 2\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 3\varphi \\ \varphi(t,t) = \cos t \end{cases}$

Exercice 2 : Courbes et surfaces

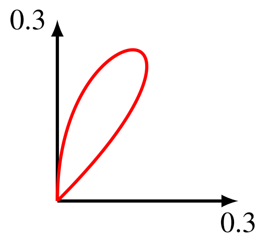
Soient Φ définie par $\Phi(u, v) = (u + v; u^2 + v^2; u^2 - v^2)$ et
Σ la surface paramétrée par Φ, $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \exists u, v \in \mathbb{R}, (x, y, z) = \Phi(u, v)\}$ et $P = (3, 5, 3)$.

1. Montrer que $P \in \Sigma$.
2. Déterminer deux vecteurs non colinéaires tangents à Σ en P.
3. Déterminer une équation du plan tangent à Σ en P.

Exercice 3 : Intégrales doubles

1. Soit T le triangle de sommets $O = (0, 0)$, $A = (1, 1)$ et $B = (2, 0)$, calculer

$$I = \iint_T \frac{1}{x+1}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$



2. Soit la courbe paramétrée par $\gamma(t) = (t - t^3, t - t^2)$, pour $t \in [0; 1]$ représentée ci-contre. Déterminer à l'aide de la formule de Green Riemann l'aire A du domaine entouré par cette courbe.

Exercice 4 : Cours

On appelle flux d'un champ constant $\overrightarrow{\Psi}$ traversant un segment $[AB]$ la quantité $\mathcal{F} = \|\overrightarrow{AB}\|\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\Psi}$ (la longueur AB multipliée par le produit scalaire de $\overrightarrow{n}$ avec $\overrightarrow{\Psi}$), où $\overrightarrow{n}$ est un vecteur de norme 1 et orthogonal à la droite (AB). On parle de flux sortant d'un domaine lorsque le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orienté vers l'extérieur du domaine.

1. Soit $\overrightarrow{\Psi} = \Psi_1 \overrightarrow{i} + \Psi_2 \overrightarrow{j}$ un champ constant, déterminer la valeur absolue du flux traversant le segment $[CD]$ avec $C = (1, 1)$ et $D = (3, 3)$.
2. Soit $\overrightarrow{\Phi}(x, y) = \Phi_1(x, y)\overrightarrow{i} + \Phi_2(x, y)\overrightarrow{j}$ un champ vectoriel du plan, écrire le DL$_1$de Φ au point $(\tilde{x}, \tilde{y})$.
3. Représenter le domaine D qui en coordonnées polaires (r, θ) vérifie $\begin{cases} 1 \leqslant r \leqslant 2 \\ \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3} \end{cases}$
4. Soit $\rho > 0$ et ϕ des réels, $\delta\rho, \delta\phi > 0$ des réels petits, et R_δ le domaine qui en coordonnées polaires (r, θ) vérifie

$$\begin{cases} \rho \leqslant r \leqslant \rho + \delta\rho \\ \phi \leqslant \theta \leqslant \phi + \delta\phi \end{cases}$$

   En considérant chacun des 4 cotés de R_δ comme des segments, déterminer le flux sortant de R_δ sur chacun des 4 cotés d'un champ vectoriel $\overrightarrow{\Psi} = \Psi_r \overrightarrow{u_r} + \Psi_\theta \overrightarrow{u_\theta}$ avec Ψ_r et Ψ_θ constant, calculer leur somme.
5. (Bonus) Retrouver la formule de la divergence en coordonnées polaires : div$\overrightarrow{\Psi} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\Psi_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\Psi_r$.