Examen session 2 _ L2 _ S4.

Exo 1 : (E_1) EDL (E_1') a pour sol. $y(x)=Ke^{\frac{2}{3}x}$ et $\frac{1}{7}e^{3x}$ est solution.
donc les sol. de (E_1) sont les fonctions $y(x)=\frac{1}{7}e^{3x}+Ke^{2/3x}$
(E_2) EDL d'ordre 2 à coef cst. $P(X)=X^2+2X+3$ $\Delta=4-12=-8=(2\sqrt{2}i)^2$ $X=-1\pm\sqrt{2}i$
sol de (E_2') $y(x)=e^{-x}(K_1\cos\sqrt{2}x+K_2\sin\sqrt{2}x)$ on cherche 1 sol particulière
de la forme $z(x)=ax+b$ $z'(x)=a$

z est solution ssi $2a+3ax+3b=x$ ssi $a=\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}+3b=0$ ssi $a=\frac{1}{3}$ et $b=\frac{-2}{9}$

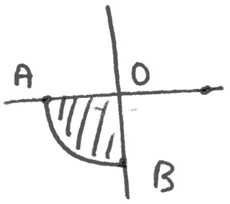
Sol. de (E_2) : $\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}+e^{-x}(K_1\cos\sqrt{2}x+K_2\sin\sqrt{2}x)$.

(E_3) $\varphi(x;y)=\xi(x+ay;y)$ $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial u}$ $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\xi}{\partial u}a+\frac{\partial\xi}{\partial v}$ $\begin{cases}u=x+ay\\v=y\end{cases}$ $\begin{cases}x=u-av\\y=v\end{cases}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+2\frac{\partial\varphi}{\partial y}=(2x+y)\varphi \iff \underbrace{\frac{\partial\xi}{\partial u}+2a\frac{\partial\xi}{\partial u}}+2\frac{\partial\xi}{\partial v}=(2u+v+v)\xi \iff \frac{\partial\xi}{\partial v}=(u+v)\xi.$$

donc $\xi(u,v)=k(u)e^{uv+\frac{1}{2}v^2}$ $a=-\frac{1}{2}$ donc $\varphi(x;y)=k(x-\frac{1}{2}y)e^{xy}$

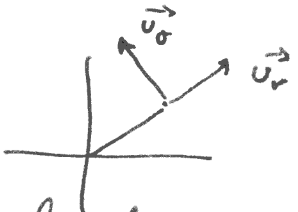
Exo 2 : $I=\iint_{\mathcal{C}} x^2y\,dx\,dy=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^2 r^3\cos^2\theta\sin\theta\; r\,dr\,d\theta.$



$$=\int_0^2 r^4\,dr\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta=\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}=\frac{-32}{15}.$$

$J=\int_{\partial\mathcal{C}^+}x^2y^2\,dx+x^3y\,dy=\iint_{\mathcal{C}}3x^2y-2x^2y\,dx\,dy=I$ par Green Riemann.

Exo 3 : $\nabla\cdot\Phi=\operatorname{div}\Phi=2xy\,f'(x^2+y^2)-2xy\,f'(x^2+y^2)=0.$



3.2. $g(r)\vec{u_\theta}=g(\sqrt{x^2+y^2})\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$

$=\left(y\left(-\frac{g(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\right);-x\left(-\frac{g(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$ Il suffit alors de poser $f(t)=-\frac{g(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$
et $g(r)\vec{u_\theta}=\Phi$.

Exo 4 : $\Psi(r,\theta)=(\sqrt{2}r\cos\theta;\sqrt{2}r\sin\theta;4r\theta)$

4.1 : $\Psi(r,0)=(\sqrt{2}r,0,0)$ qui décrit (Ox) lorsque x décrit r.

4.2 : $\frac{\partial\Psi}{\partial r}=(\sqrt{2}\cos\theta;\sqrt{2}\sin\theta;4\theta)$ $\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}=(-\sqrt{2}r\sin\theta;\sqrt{2}r\cos\theta;4r).$

$\frac{\partial\Psi}{\partial r}(1;\frac{\pi}{4})=(1;1;\pi)$ $\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}(1;\frac{\pi}{4})=(-1;1;4)$ $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\\pi\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-\pi\\-4-\pi\\2\end{pmatrix}.$ $\Psi(1;\frac{\pi}{4})=(1;1;\pi)$

T a pour équation $(4-\pi)(x-1)-(4+\pi)(y-1)+2(z-\pi)=0.$

4.3 : $(4-\pi)(-1)-(4+\pi)(-1)+2(-\pi)=-4+\pi+4+\pi-2\pi=0$ CQFD

4.4 : $\vec{U}=(1;1;\pi)$ et $\vec{V}=\vec{U}\wedge\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\\pi\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}4-\pi\\-4-\pi\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+4\pi+\pi^2\\-2+4\pi-\pi^2\\-8\end{pmatrix}.$

$(\vec{U};\vec{V})$ est un repère orthogonal de T.