L2&PréIng2 GC
Durée de l'épreuve : 1,5 heures
Barème indicatif : 6+4+4+6

# Examen de Mathématiques, session 2, 15 juin 2022

Les documents sont interdits à l'exception d'une feuille A4, manuscrite, au choix de l'étudiant. L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints.

## Exercice 1 :

Résoudre les équations différentielles et les EDP suivantes :

$$(E_1)\ :\ 3y' - 2y = e^{3x} \qquad (E_2)\ :\ y'' + 2y' + 3y = x \qquad (E_3)\ :\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (2x+y)\varphi$$

## Exercice 2 :

Soit $O = (0;0)$, $A = (-2;0)$ et $B = (0;-2)$, et $\mathcal{C}$ le quart de disque de centre $O$ et de "sommets" $A$ et $B$

1. Calculer l'intégrale double $I = \iint_{\mathcal{C}} x^2 y \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
2. Calculer la circulation, le long du bord de $\mathcal{C}$, du champ de vecteurs $\Phi(x,y) = (y; xy)$ soit l'intégrale

$$J = \int_{\partial\mathcal{C}^+} x^2y^2\,\mathrm{d}x + x^3y\,\mathrm{d}y$$

## Exercice 3 :

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables, on pose $\Phi(x,y) = \big(yf(x^2+y^2); -xf(x^2+y^2)\big)$

1. Montrer que $\nabla \cdot \Phi = 0$.
2. En déduire que div $(g(r)\overrightarrow{u_\theta}) = 0$, où $(r,\theta)$ sont les coordonnées polaires et $(\overrightarrow{u_r}; \overrightarrow{u_\theta})$, la base mobile des coordonnées polaires.

## Exercice 4 :

$\Psi(r,\theta) = (\sqrt{2}r\cos\theta, \sqrt{2}r\sin\theta, 4r\theta)$ et $S = \{\Psi(r,\theta) \in \mathbb{R}^3 / r \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Im}(\Psi)$.

1. Montrer que la droite $(Ox)$ est incluse dans $S$.
2. Déterminer $T$ le plan tangent à $S$ en $\Psi(1; \frac{1}{4}\pi)$, ainsi qu'un vecteur normal à $T$.
3. Montrer que $0 \in T$.
4. Déterminer un repère orthogonal de $T$.