L2&Pré-Ing2 GC
Durée de l'épreuve : 2,5 heures
Barème indicatif : 6+4+2,5+4+3,5

Examen de Mathématiques, 10 mai 2022

Les documents sont interdits à l'exception d'une feuille A4 recto, manuscrite, au choix de l'étudiant. L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints.

Exercice 1 : Équations différentielles

Résoudre les équations différentielles et EDP suivantes :

$$(E_1) \; : \; 5y''+8y'+5y = 1 \qquad (E_2) \; : \begin{cases} 2y(1+x^2)y' + y^2 + 1 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (E_3) \; : \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} - 2\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -2\varphi \\ \varphi(t, 2t) = 1 \end{cases}$$

Exercice 2 : Courbes et surfaces

Soit Σ la surface d'équation : $4(z-1)e^{2y-x} - 2z^2 + xy + 2 = 0$ et les trois points $A = (0,0,1)$, $B = (-2;-1;0)$ et $C = (2;1;2)$.

1. Montrer que C appartient à Σ.
2. Déterminer un vecteur orthogonal à Σ en C.
3. Le point C appartient-il à la droite (AB) ?
4. Montrer que la droite (AB) est incluse dans Σ.
5. Déterminer une équation du plan T tangent à Σ en C
6. Montrer que la droite (AB) est incluse dans T.

Exercice 3 : Opérateurs différentiels

Soit $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ un champ vectoriel, on note $\Psi \cdot \nabla$ l'opérateur différentiel :

$$\Psi \cdot \nabla = \psi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial}{\partial y} + \psi_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

1. Montrer que $\big((x,y,z)\cdot\nabla\big)(x+2y+3xyz) = x+2y+9xyz$.
2. Montrer que $\big((1,y,z^2)\cdot\nabla\big)\begin{pmatrix} xyz \\ 1 \\ e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz+xyz+xyz^2 \\ 0 \\ 2e^{2x} \end{pmatrix}$.
3. Soit $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ et $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ deux champs vectoriels, on nommera les différents opérateurs différentiels qui apparaîtront dans cette question :
   (a) Écrire γ_1 la première composante du champ vectoriel : $\nabla \wedge (\Psi \wedge \Phi)$.
   (b) Écrire γ_2 la première composante du champ vectoriel : $(\nabla\cdot\Phi)\Psi - (\nabla\cdot\Psi)\Phi + (\Phi\cdot\nabla)\Psi - (\Psi\cdot\nabla)\Phi$.
   (c) Montrer que $\gamma_1 = \gamma_2$. On ne demande pas de le montrer mais en fait l'égalité est vraie pour chaque composante.

Exercice 4 :

Soit $O = (0;0)$, $A = (1;-1)$ et $B = (1;1)$, et $\mathcal{C}$ le quart de disque de centre O et passant par A et B

1. Représenter $\mathcal{C}$ puis calculer l'intégrale double $I = \displaystyle\iint_{\mathcal{C}} xy^2 \, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
2. Calculer la circulation, le long du bord de $\mathcal{C}$, du champ de vecteurs $\Phi(x,y) = (y; x^2y^2)$ soit l'intégrale

$$J = \int_{\partial\mathcal{C}+} y\,\mathrm{d}x + x^2y^2\,\mathrm{d}y$$

Exercice 5 :

Soit a, b deux fonctions continues et (E) l'équation différentielle (E) : $y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y(x)^2 = 0$

1. L'équation (E) est-elle linéaire ?
2. Soit y une fonction qui ne s'annule pas, on pose $z(x) = \frac{1}{y(x)}$, déterminer une équation différentielle linéaire (F) d'ordre 1 telle que
$$y \text{ est solution de } (E) \Longleftrightarrow z \text{ est solution de } (F)$$
3. Application : On va résoudre sur $[0; +\infty[$ l'équation différentielle (E) : $(1+x)^2 y' + y - y^2 \frac{1}{1+x} e^{\frac{1}{x+1}} = 0$
   (a) Utiliser la méthode précédente pour vous ramener à une équation différentielle linéaire (F).
   (b) Résoudre l'équation différentielle sans second membre (F') associée à (F).
   (c) Résoudre l'équation différentielle (F).
   (d) Résoudre (E).