L2 SVS3 **Examen de mathématiques, 7 janvier 2021**

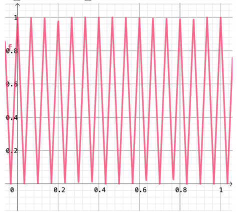
Exercice 1 : [Sur 15 points]

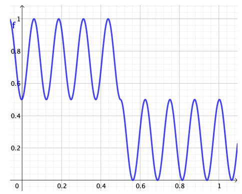
1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r
   (a) Donner u_{50} en fonction de u_0 et r
   (b) Donner une formule simple en fonction de u_0 et r pour calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{50}$
2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Donner une formule simple en fonction de u_0 et q pour calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{50}$.
3. Soit $f\colon [0;1] \to [0;1]$ une fonction et soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \in [0;1]$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Quelle équation doit-on résoudre pour trouver les points fixes de f ?
   (b) Supposons que $1/2$ soit un point fixe de f et que f soit dérivable. Quelle condition suffisante (la plus large possible) sur $f'(\frac{1}{2})$, donne la stabilité de ce point fixe ?
4. On considère l'équation différentielle autonome $x' = f(x)$ où x est une fonction inconnue dérivable dépendant du temps et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) Quelle équation doit-on résoudre pour trouver les solutions stationnaires ?
   (b) Si $x = 2$ est une solution stationnaire et f dérivable, quelle condition suffisante (la plus large possible) sur $f'(2)$ entraîne que la solution est stable ?
   (c) Supposons que les solutions suivent le graphique suivant :
   $0 \longleftarrow 2 \longrightarrow 4 \longleftarrow$
   Si une solution vérifie $x(3) = 1$, quelle est son comportement (limite, variations) ?
5. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définies pour tout x et y réels par $f(x,y) = 3xy - 5x$ et $g(x,y) = 2xy - 3x + \dfrac{y}{2}$.
   Calculer les dérivées partielles de f et g.
6. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer AB.
   (b) Calculer A^2.
7. Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer le déterminant de C et C^{-1} si c'est possible.
   (b) Donner les valeurs propres de C.
   (c) Trouver un vecteur propre de C correspondant à la valeur propre 2.
8. Soient (u_n) et (w_n) deux suites définies par la donnée de u_0 et w_0 et la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n w_n - 5u_n \\ w_{n+1} &= 2u_n w_n - 3u_n + \dfrac{w_n}{2} \end{cases}$$
   Quel système d'équation faut-il résoudre pour trouver les points fixes ? On ne demande pas de le résoudre, pas tout de suite ... !

Exercice 2 : [Sur 6 points] On reprend la question 8 de l'exercice 1.

1. Résoudre le système.
2. Donner la matrice jacobienne en chacun des points fixes trouvés (on pourra s'aider de la question 5 de l'exercice 1)
3. Etudier la stabilité de chacun des points fixes.

Exercice 3 : [Sur 4 points] On se propose de fabriquer une suite de nombres aléatoires dans $[0,1]$ par la donnée de $u_0 \in [0,1]$ (germe de la suite) et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Quelle fonction vous parait la plus appropriée pour cette suite ? Justifier votre choix.

Choix 1 : 

Choix 2 : 

Correction.

Exercice 1 : [Sur 15 points] 1 point par question sauf la question 5

1. (a) $u_{50} = u_0 + 50r$

   (b) $u_0 + u_1 + \cdots + u_{50} = 51 \times \dfrac{u_0 + u_{50}}{2} = \dfrac{51}{2}(2u_0 + 50r) = 51(u_0 + 25r)$.
   0,75 pour la première égalité. 0,25 pour la suite

2. $u_0 + u_1 + \cdots + u_{50} = u_0 \times \dfrac{1 - q^{51}}{1 - q}$.

3. (a) $f(x) = x$

   (b) $|f'(\frac{1}{2})| < 1$.

4. (a) $f(x) = 0$

   (b) $f'(2) < 0$.

   (c) La solution sera décroissante et tendra vers 0. Le fait que le temps commence à 3 n'a aucune importance.

5. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 3y - 5$
   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 3x$
   $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x;y) = 2y - 3$
   $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x;y) = 2x + \frac{1}{2}$ 0,5 point par dérivée partielle exacte (bonus de 1 point par rapport au barème initial)

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (a) $\det(C) = 2 \neq 0$ donc C est inversible et $C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   (b) $C - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$. Donc $\det(C - \lambda I_2) = (1-\lambda)(2-\lambda)$. Les valeurs propres sont donc 1 et 2.

   (c) On doit résoudre le système d'équation $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ qui équivaut à :
   $$\begin{cases} x + y &= 2x \\ 2y &= 2y \end{cases} \iff x = y$$
   Ainsi le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre 2

8. On doit résoudre le système suivant :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x &= 3xy - 5x \\ y &= 2xy - 3x + \dfrac{y}{2} \end{cases}$$

Exercice 2 : [Sur 6 points]

1. La première ligne du système équivaut à $6x - 3xy = 0$ ce qui équivaut à $3x(2+y) = 0$ c'est à dire $x = 0$ ou $y = 0$. Etudions ces deux cas.
   Si $x = 0$ la seconde ligne devient $y = \frac{y}{2} \iff \frac{y}{2} = 0 \iff y = 0$. $(0,0)$ est un point fixe du système.
   Si $y = 2$ la seconde ligne devient $2 = 4x - 3x + 1 \iff 1 = x$ donc $(1,2)$ est l'autre point fixe du système. sur 2 points

2. $J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
   $J_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ sur 1 point

3. Pour $(0,0)$ les valeurs propres de la matrice jacobienne sont -5 et $\frac{1}{2}$. Comme il y a une des valeur propre qui est plus grande que 1 en valeur absolue, le point est instable.

Pour $(1,2)$ le calcul est plus long. Le déterminant de $J_{(1,2)} - I_2$ est $(1-\lambda)(\frac{3}{2}-\lambda) - 3 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\lambda + \lambda^2 - 3 = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda - \frac{3}{2}$. Le discriminant est positif (évident), il y a donc 2 racines réelles, et le produit des racines vaut $-\frac{3}{2}$, il est donc impossible que les deux racines soient entre -1 et 1. Donc le point fixe est aussi instable.Sur 3 points

Exercice 3 : Le premier choix est le bon, en effet tous les points fixes sont fortement instables, avec une dérivée strictement plus grande que 1, et l'intervalle $[0,1]$ est bien couvert de façon uniforme (aucune zone n'est privilégiée.).
Le second choix n'est pas bon pour deux raisons : d'abord la suite récurrente va induire une alternance entre les intervalles $[0; \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}; 1]$, ce qui est loin d'être de l'aléatoire. Ensuite, le seul point fixe, en $\frac{1}{2}$ est stable avec une dérivée nulle, donc tôt ou tard cette suite va se stabiliser en $1/2$.
2 point par justification du bon choix et du mauvais choix. Si un graphique est donné avec une suite correctement tracée, mettre 1 point (à déduire des justifications précédentes si il y en a). Valoriser toute recherche explicite.