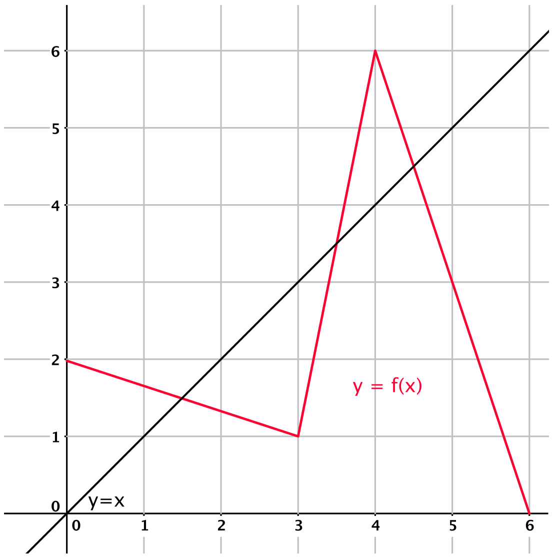
L2 SV-SVN 2018/2019

Examen de mathématiques, 7 janvier 2019

durée deux heures, calculatrice collège autorisée et documents interdits.

Exercice 1 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in [0;6]$ et la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction dont la courbe est une ligne brisée représentée dans le dessin ci-dessous. On supposera que les points définissant la ligne ont des coordonnées entières.



1. On suppose ici que $u_0 = 5$.
   Donner les valeurs de u_1 et u_2, ainsi qu'une valeur approchée de u_3.
   La suite semble-t-elle monotone ?
   Est-ce qu'elle semble converger ?
   Si oui, vers quelle valeur ?
   On pourra justifier à l'aide d'un dessin.
2. D'après le graphique quels sont les points fixes de la suite ? Sont-ils stables ou instables ? Justifier.
3. On suppose maintenant que $u_0 = 3$ et on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} = 2 - \dfrac{u_n}{3}$.
   On définit alors une nouvelle suite (w_n) par
   $w_n = u_n - \dfrac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que (w_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
   (b) Quelle est la limite de (w_n) ? Justifier.
   (c) En déduire la limite de (u_n).

Exercice 2 : On considère l'équation différentielle : (E) $x' = x^2 - x$

1. Donner les solutions stationnaires.
2. Donner la stabilité des solutions stationnaires. Justifier.
3. Soit x_1 la solution de l'équation (E) telle que $x_1(3) = 0{,}5$. Quelle est la limite de x_1 en $+\infty$? Justifier.

Exercice 3 : Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer, si possible, JK, KJ, J^2 et PK.
2. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

Exercice 4 : Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{8} & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver les valeurs propres et une base de vecteurs propres de A. Diagonaliser A.
2. En déduire une diagonalisation de B. Indication : $\dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 5 : Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \dfrac{5}{8}x + 2xy$ et $g(x,y) = -\dfrac{y}{2} + 2xy$.

1. Donner les dérivées partielles de f et g par rapport à chacune des variables.
2. Résoudre le système $\begin{cases} x = f(x,y) \\ y = g(x,y) \end{cases}$

Exercice 6 : (bonus) Etudier les suites récurrentes (u_n) et (w_n) définies par : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n, w_n) \\ w_{n+1} = g(u_n, w_n) \end{cases}$

Correction

Exercice 1 :

1. $u_1 = 3$, $u_2 = 1$ et $u_3 \approx 1{,}67$.
   La suite n'est clairement pas monotone puisque $u_1 < u_0$ et $u_3 > u_2$.
   Un dessin du comportement de la suite montre qu'elle s'enroule en escargot autour du point fixe $(1,5; 1,5)$. Donc la suite semble converger vers $1,5$.
2. Les points fixes sont à l'intersection des deux courbes dessinées : 1,5 ; 3,5 et 4,5.
   La pente en $1,5$ vaut $-1/3$ donc est en valeur absolue inférieure strictement à 1, et donc ce point fixe est stable. En revanche les deux autres points fixes sont instables avec une pente qui, en valeur absolue, est strictement supérieure à 1. Par exemple, en $4,5$ cette pente vaut $-6/2 = -3$, et on a $|-3| = 3 > 1$.
3. (a) Pour tout n, $w_{n+1} = u_{n+1} - \frac{3}{2} = 2 - \frac{u_n}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{u_n}{3} = \frac{-1}{3}\left(u_n - \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{3}w_n$.
   (w_n) est donc bien géométrique de raison $-1/3$.
   (b) Comme la raison est strictement comprise entre -1 et 1, la suite tend vers 0.
   (c) $u_n = \frac{3}{2} + w_n$, donc (u_n) tend vers $\frac{3}{2}$, c'est bien ce qu'on avait trouvé.

Exercice 2 :

1. $x' = 0 \iff x^2 - x = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$
2. Posons $f(x) = x^2 - x$. $f'(x) = 2x - 1$. $f'(0) = -1 < 0$ donc $x = 0$ est une solution stationnaire stable. $f'(1) = 1 > 0$ donc $x = 1$ est une solution stationnaire instable.
3. Entre 0 et 1 les solutions décroissent et tendent vers la première solution stationnaire inférieure, c'est à dire 0.

Exercice 3 :

1. $JK = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $KJ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. PK impossible à calculer.
2. $\det P = 2 \neq 0$ donc P est inversible. $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 :

1. Valeurs propres : 2 et 14. Vecteurs propres : $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On pose $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$. Alors $Q^{-1}AQ = \Delta$
2. $B = \frac{1}{8}A$ d'où $Q^{-1}\frac{1}{8}AQ = \frac{1}{8}\Delta$. Ainsi B est diagonalisable et ses valeurs propres sont $2/8 = 1/4$ et $14/8 = 7/4$.

Exercice 5 :

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{5}{8} + 2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2y$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{2} + 2x$
2. On trouve $x = y = 0$ ou $x = \frac{3}{4}$ et $y = \frac{3}{16}$.

Exercice 6 : (bonus) On est ramené aux exercices précédents. On trouve deux points fixes $(0,0)$ et $(\frac{3}{4}, \frac{3}{16})$, et on étudie ces points fixes avec la matrice jacobienne : $J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} + 2y & 2x \\ 2y & -\frac{1}{2} + 2x \end{pmatrix}$.
On a $J(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dont les deux valeurs propres sont, en valeur absolue, strictement inférieures à 1, donc le point fixe est stable. Et pour l'autre point fixe, on retombe sur la matrice B que l'on a déjà étudié, et on sait qu'une des valeurs propres de B est en valeur absolue strictement supérieure à 1, et l'autre est strictement inférieure. Ainsi, on ne peut pas conclure sur ce point fixe.
En général, on peut quand même supposer que les suites ont de grandes chances de tendre vers 0 toutes les deux, ou bien d'avoir un comportement chaotique.