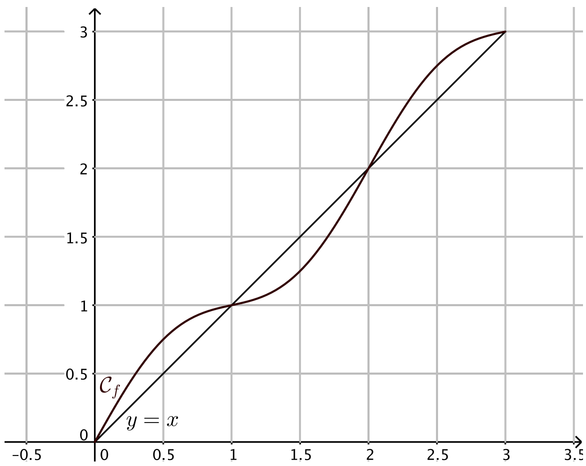
Deuxième Année de Licence SV-SVN 2017/2018

Examen de mathématiques, 8 janvier 2018

deux heures, calculatrice collège autorisée et documents interdits.

Exercice 1 : On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in [0,3]$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où la courbe de f, nommée $\mathcal{C}_f$, est dessinée sur le graphique ci-dessous.



1. Conjectures graphiques.
   (a) À l'aide du graphique, donner le comportement de la suite suivant les valeurs de u_0. Aucune justification n'est demandée.
   (b) Graphiquement, quels sont les points fixes de la suite ? Sont-ils stables ou instables ?
2. [*question plus difficile*] On suppose maintenant que f est définie sur $[0,3]$ par $f(x) = x + \frac{\sin(\pi x)}{4}$.
   (a) Calculer la dérivée de f.
   (b) Montrer que $f'(2) = 1 + \frac{\pi}{4}$ et $f'(1) = 1 - \frac{\pi}{4}$.
   (c) On rappelle que $\pi \approx 3{,}14$, montrer soigneusement que 1 est un point de fixe stable.

Exercice 2 : On considère l'équation différentielle autonome $x' = f(x)$ où $f(x) = -x + 3x^2 - 2x^3$.

1. Développer $(2x-1)(1-x)$. En déduire une factorisation de $f(x)$.
2. Donner le tableau de signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. Quelles sont les solutions stationnaires de l'équation différentielle ?
4. Représenter le comportement des solutions à l'aide d'un graphe.
5. Donner la stabilité des solutions stationnaires.
6. Si une solution vérifie $x(0,25) = 4$ quelle sera son évolution et sa limite ?

Exercice 3 : Soit f la fonction à deux variables définies par $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 3$.

1. Montrer que la ligne de niveau d'équation $f(x,y) = 3$ est une droite.
2. Calculer les dérivées partielles de f par rapport à x et y.
3. Donner une équation du plan tangent à la surface représentative de la fonction au point $A(1,-2,4)$.

Exercice 4 : .

On considère deux suites définies par récurrence par : $\begin{cases} u_{n+1} & = & \dfrac{3}{8}u_n - \dfrac{1}{8}w_n \\ w_{n+1} & = & -\dfrac{1}{8}u_n + \dfrac{3}{8}w_n \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

et par la donnée de $u_0 = 8$ et $w_0 = 0$. On posera $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1, w_1, u_2, w_2.
2. Les suites (u_n) et (w_n) sont-elles arithmétiques ou géométriques ? Justifier.
3. Trouver la matrice B telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = BX_n$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. Calculer, lorsque cela est possible, les produits de matrices AV_1, AV_2, V_1V_2.
5. Exprimer B en fonction de A et en déduire une matrice P inversible et une matrice Δ diagonale telle que $P^{-1}BP = \Delta$
6. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $B^n = P\Delta^n P^{-1}$
7. En déduire l'expression de u_n et w_n en fonction de n.
8. Donner en justifiant la limite des suites (u_n) et (w_n).