Deuxième Année de Licence SV-SVN 2016/2017

Examen de mathématiques, 3 janvier 2017

deux heures, calculatrice collège autorisée et documents interdits.

UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

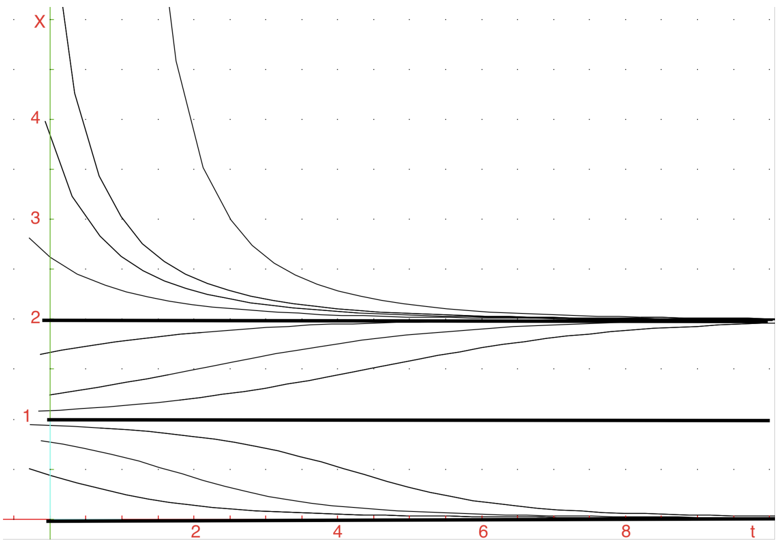
Exercice 1 : (6pt) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -\dfrac{u_n}{3} + 4$

1. Conjecture sur le comportement de la suite.
   (a) Sur un même graphique, tracer les droites d'équation $y = x$ et $y = -\dfrac{x}{3} + 4$.
   (b) En ajoutant sur ce graphique des tracés permettant de visualiser l'évolution de la suite, conjecturer sur le comportement (monotonie, convergence) de la suite en fonction de u_0.
2. On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_n - 3$.
   Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et précisez sa raison.
3. Montrer alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. Quels sont les points fixes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Etudier leur stabilité.

Exercice 2 : (3pt) Soit f définie par $f(x) = e^{2x} + x^2 - x - 1$.

1. Calculer $f'(0)$.
2. $x = 0$ est elle une solution stationnaire stable de l'équation différentielle autonome $x' = f(x)$?

Exercice 3 : (4,5pt) On considère une équation différentielle autonome de la forme $x' = f(x)$ dont certaines solutions sont montrées dans le graphique ci-contre. On répondra aux questions suivantes de façon approximative (pour les valeurs numériques) en se basant sur le graphique.



1. Quels sont les solutions stationnaires ? Donner leur stabilité.
2. Quel est le signe de $f'(2)$, $f'(1)$, et de $f(3)$, $f(1,5)$? Justifier.
3. Si x est une solution de cette équation telle que $x(0,5) = 4$, combien vaut $x(8)$?

Exercice 4 : (11pt) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$.

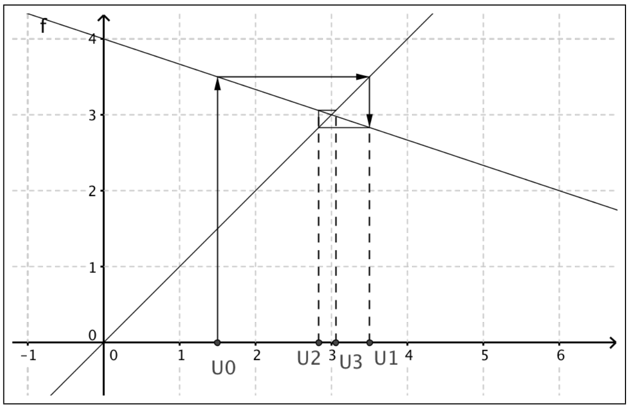
1. Calculer AP. On pourra vérifier que $QAP = B$.
2. Montrer que P est inversible et exprimer P^{-1} en fonction de Q. En déduire $\Delta = P^{-1}AP$.
3. Donner les vecteurs et les valeurs propres de A.

On considère deux suites définies par récurrence par : $\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n - \frac{7}{2}w_n \\ w_{n+1} &= \frac{3}{2}u_n - 3w_n \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

4. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\Delta^n = P^{-1}A^nP$.
5. On suppose que $u_0 = 1$ et $w_0 = 0$.
   (a) Calculer u_1 et w_1. (w_n) peut-elle être géométrique ?
   (b) À l'aide de la question **4.** exprimer (u_n) et (w_n) en fonction de n.
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$

Correction

Exercice 1 : 1. (a)



(b) D'après le graphique, on peut conjecturer que la suite converge vers 3, qu'elle est constante seulement si $u_0 = 3$, et que pour $u_0 \neq 3$ elle est ni croissante, ni décroissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\frac{u_n}{3} + 4 - 3 = -\frac{u_n}{3} + 1 = -\frac{1}{3}(u_n - 3) = -\frac{1}{3}w_n$. (w_n) est donc géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
3. Comme la raison de (w_n) est strictement comprise entre -1 et 1, la suite converge vers 0. Or, on a $u_n = 3 + w_n$, ce qui entraîne que la suite (u_n) converge vers 3.
4. On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = -\frac{x}{3} + 4$, les points fixes de la suite sont les solutions de l'équation $f(x) = x$, c'est à dire $x = -\frac{x}{3} + 4$. On trouve $x = 3$ comme seule solution, c'est donc l'unique point fixe.
Comme $f'(3) = -\frac{1}{3} \in]-1, 1[$, ce point fixe est stable.

Exercice 2 : 1. $f'(x) = 2e^{2x} + 2x - 1$. $f'(0) = 2 - 1 = 1$

2. On a bien $f(0) = 0$ donc $x = 0$ est une solution stationnaire, mais comme $f'(0) > 0$ elle est instable.

Exercice 3 : 1. D'après le graphique les solutions stationnaires sont $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$. Les solutions $x = 0$ et $x = 2$ sont stables et la solution $x = 1$ est instable.

2. Comme $x = 2$ est une solution stationnaire stable, on a vraisemblablement $f'(2) < 0$, et comme $x = 1$ est une solution stationnaire instable, on a vraisemblablement $f'(1) > 0$.
Lorsque x vaut 3, on peut voir que les solutions correspondantes sont décroissantes, donc $f(3) < 0$.
Lorsque x vaut $1,5$, on peut voir que les solutions correspondantes sont croissantes donc $f(1,5) > 0$.
3. Si $x(0,5) = 4$, comme $x > 2$, la solution sera décroissante et convergera vers 2. On peut lire sur le graphique qu'on aura $x(8) \approx 2$.

Exercice 4 : 1. $AP = \begin{pmatrix} 2 & -\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{3}{2} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 - \frac{21}{2} & 2 - \frac{7}{2} \\ \frac{21}{2} - 9 & \frac{3}{2} - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

$QAP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

2. $\det(P) = 4 \neq 0$ donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{4}Q$.
On en déduit que $\Delta = \frac{1}{4}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$
3. D'après ce qui précède, on trouve que les vecteurs propres sont $V_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ de valeur propre $\frac{1}{2}$, et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre $-\frac{3}{2}$.