Deuxième Année de Licence SV-SVN
2015/2016

Examen de mathématiques, 8 janvier 2015

deux heures, calculatrice collège autorisée et documents interdits.

Exercice 1 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -\frac{u_n}{2} + 3$$

1. Conjecture sur le comportement de la suite.
   (a) Sur un même graphique, tracer les droites d'équation $y = x$ et $y = -\frac{x}{2} + 3$.
   (b) En ajoutant sur ce graphique des tracés permettant de visualiser l'évolution de la suite, conjecturer sur le comportement (monotonie, convergence) de la suite en fonction de u_0.
2. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - 2$$
   Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et précisez sa raison.
3. Montrer alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. Quels sont les points fixes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Etudier leur stabilité.

Exercice 2 : On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = 10x(t) - 2(x(t))^2$$

où x est une fonction dérivable dépendant du temps t.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 10x - 2x^2$. Calculer $f'(x)$.
2. Donner les solutions stationnaires de l'équation différentielle.
3. Représenter le comportement des solutions à l'aide d'un graphe.
4. Donner la stabilité des solutions stationnaires.
5. Soit x une solution de l'équation différentielle telle que $x(0) > 0$.
   Peut-on prévoir l'évolution de la fonction x ? Justifier.

Exercice 3 : Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AV et AW. En déduire AP.
2. Rappeler les formules donnant l'inverse d'une matrice 2×2. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
3. Vérifier que $\Delta = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale. Donner sa valeur.
4. On considère deux suites définies par récurrence par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 8u_n - 10w_n \\ w_{n+1} &= 5u_n - 7w_n \end{cases}$$
   avec $u_0 = 1$ et $w_0 = 0$.
   (a) Exprimer u_n et w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$

Exercice 4 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (y-x)(y-x^2)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Tracer la courbe de niveau d'équation $f(x,y) = 0$
2. Développer $f(x,y)$ et calculer les dérivées partielles de f.