Deuxième Année de Licence SV-SVN
2013/2014

Examen de mathématiques, 9 janvier 2014

deux heures, calculatrice et documents interdits.

Exercice 1 : On considère la suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 \geq 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (u_n)^3 - 6(u_n)^2 + 12u_n - 6$$

1. On définit la fonction f par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$. Montrer que $f(x) - x = (x-1)(x-2)(x-3)$.
2. En déduire les points fixes de f.
3. Calculer $f'(x)$.
4. Pour chacun des points fixes trouvés, étudier sa stabilité.
5. On suppose maintenant que $u_0 = \frac{2}{3}$, déterminer la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, AB, B^2 et $(A+B)^2$.
2. A-t-on $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Exercice 3 : Soit f la fonction définie par $f(x) = x(1-x)$. On considère l'équation différentielle autonome

$$x'(t) = x(t)\big(1 - x(t)\big)$$

1. Étudier les solutions stationnaires de cette équation et leur stabilité.
2. Représenter le comportement des solutions de cette équation à l'aide d'un graphe.
3. Déterminer la limite en $+\infty$ de la solution vérifiant $x(0) = \frac{1}{2}$.

Exercice 4 : Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice A ?
2. Diagonaliser A.
3. On définit deux suites (u_n) et (w_n) par la donnée de $u_0 = 1$ et $w_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

   Déterminer l'expression de u_n et w_n en fonction de n.

Exercice 5 : Soient (u_n) et (w_n) deux suites vérifiant les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} & = & 5u_n - 3u_n w_n \\ w_{n+1} & = & -w_n + u_n w_n \end{cases}$$

1. Quels sont les points fixes du système ?
2. On pose $f(x,y) = 5x - 3xy$ et $g(x,y) = (x-1)y$ pour tout x et y réels.
   Calculer les dérivées partielles de ces deux fonctions.
3. Déterminer la matrice jacobienne du système en chacun des points fixes.
4. Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$. Donner les valeurs propres de A et B dans $\mathbb{C}$.
5. Que dire de la stabilité des points fixes ? Justifier.