
Examen 2^{de} session

**Durée: 1h30. Aucun document ni calculatrice autorisé.
Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.**

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 2 - \frac{2}{x+1}$. L'objectif est d'étudier le comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \geq 0$ $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Étudier rapidement la fonction f et tracer son graphe.

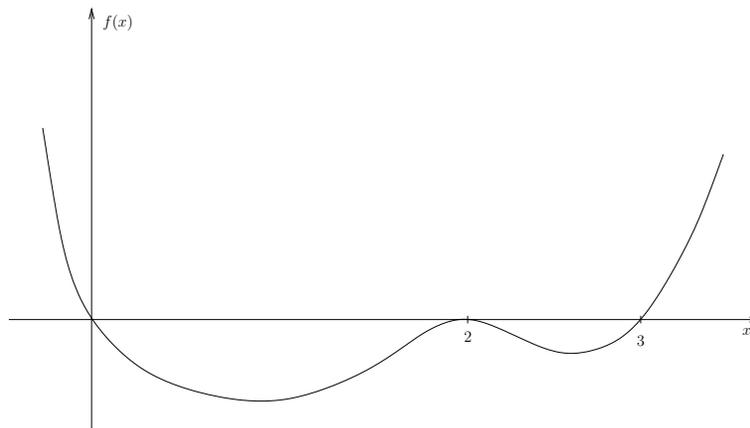
b) Vérifier que $f(x) - x = \frac{x(1-x)}{x+1}$.

c) Déterminer les points fixes de f et étudier leur stabilité.

d) Représenter graphiquement les 4 premiers termes de la suite pour les valeurs de u_0 suivantes: $1/4$, $1/2$, 2 et 5 . Conjecturer le comportement de la suite $(u_n)_n$ lorsque n tend vers l'infini.

e) Que peut-on dire de la suite $(u_n)_n$ dans le cas $u_0 = 1$?

Exercice 2. Soit f la fonction dont le graphe est tracé ci-dessous. On s'intéresse à l'équation



différentielle $x' = f(x)$.

a) Déterminer les solutions stationnaires de cette équation différentielle.

b) Faire un tableau de signe de la fonction f , puis représenter le comportement des solutions de cette équation différentielle à l'aide d'un graphe.

c) Étudier la stabilité des solutions stationnaires.

d) Quelle est la limite quand $t \rightarrow +\infty$ de la solution $x(t)$ de l'équation différentielle vérifiant $x(0) = 1$?

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A (on appellera λ_1 la plus petite des deux).

b) Vérifier que les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A associés à λ_1 et λ_2 respectivement.

c) Déterminer des matrices D et Q telles que $D = Q^{-1}AQ$.

d) Justifier que la matrice Q possède un inverse et calculer Q^{-1} .

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par récurrence par $u_0 = 5$, $v_0 = 0$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 6v_n, \\ v_{n+1} &= -u_n + 5v_n. \end{cases}$$

e) Écrire le système sous la forme $U_{n+1} = AU_n$ et préciser le vecteur U_0 .

f) Déterminer l'expression de U_n en fonction de n , puis celles de u_n et v_n .

g) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{3^n}$.