L2 SV-SVN
09 Janvier 2013
Mathématiques

Examen

Durée: 2h. Aucun document ni calculatrice autorisé.
Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.
La Feuille Annexe est à rendre avec la copie.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction dont le graphe est donné **sur la feuille Annexe**.

a) À l'aide du graphe déterminer, en expliquant votre réponse, les points fixes de f. Pour chacun d'entre eux on pourra donner une valeur approchée.

b) Représenter graphiquement (sur la feuille Annexe) les termes u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 de la suite lorsque $u_0 = 1$. On prend cette fois $u_0 = 6$, représenter graphiquement les termes u_0, u_1, u_2 et u_3.

c) On prend maintenant $u_0 = 7$. Représenter graphiquement les termes u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4. La suite $(u_n)_n$ est-elle croissante?

d) Pour chacun des points fixes trouvés au a) dire s'il vous semble stable ou instable (expliquez votre réponse).

e) Donner une valeur de u_0 telle que la suite $(u_n)_n$ tende vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2. Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \dfrac{8x + 6y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$.

a) Montrer que la courbe de niveau 1 de f est un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.

b) Calculer les dérivées partielles de la fonction f.

c) Calculer le vecteur gradient de f aux points $O(0, 0)$ et $B(1, -1)$.

Exercice 3. On considère une population dont l'évolution est donnée par l'équation

$$x'(t) = rx(t)(x(t) - M)(K - x(t)),$$

où $x(t)$ désigne le nombre d'individus à l'instant t exprimé en centaines d'individus. Le nombre r est le taux de croissance intrinsèque de la population, M est appelé la population seuil et K la capacité limite. Dans la suite on prendra $r = 2$, $M = 3$ et $K = 10$, l'évolution de la population est donc donnée par l'équation

$$x'(t) = 2x(t)(x(t) - 3)(10 - x(t)),$$

a) Donner la fonction f pour que l'équation s'écrive sous la forme $x' = f(x)$.

b) Montrer qu'il y a 3 solutions stationnaires que l'on déterminera.

c) Étudier la stabilité des solutions stationnaires.

TSVP

d) Étudier le signe de $f(x)$.

e) Représenter le comportement des solutions de cette équation différentielle à l'aide d'un graphe. Retrouver les résultats de la question b) à l'aide du graphe.

f) Déterminer le comportement de cette population, c'est-à-dire de la fonction $x(t)$, selon les valeurs du nombre initial $x(0) = x_0$ d'individus. Expliquer les appellations "population seuil" et "capacité limite".

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A (on appellera λ_1 la plus petite des deux).

b) Vérifier que les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A associés à λ_1 et λ_2 respectivement.

c) Déterminer des matrices D et Q telles que $D = Q^{-1}AQ$.

d) Justifier que la matrice Q possède un inverse et calculer Q^{-1}.

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par $u_0 = 5$, $v_0 = 0$ et $\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2u_n + 2v_n, \\ v_{n+1} & = & 3u_n + v_n. \end{array} \right.$

e) Écrire le système sous la forme $U_{n+1} = AU_n$ et préciser le vecteur U_0.

f) Déterminer l'expression de U_n en fonction de n, puis celles de u_n et v_n.

g) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{4^n}$.

Numéro de copie :

L2 SV-SVN

Mathématique

Examen du 09 Janvier 2013 : Feuille Annexe