L2 SV-SVN
09 Janvier 2013
Mathématiques

Corrigé de l'examen

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction dont le graphe est donné sur la feuille Annexe.

a) Les points fixes de f sont les solutions de l'équation $f(x) = x$. Graphiquement, ce sont les abscisses des points d'intersection entre le graphe de f et la droite d'équation $y = x$. On trouve 4 points fixes: $x_1 = 0$, $x_2 \simeq 4$, $x_3 \simeq 6,6$ et $x_4 \simeq 8,7$.

b) Voir feuille annexe. On a noté u la suite avec $u_0 = 1$ et v celle avec $v_0 = 6$.

c) Voir feuille annexe, on a not w cette suite. On constate graphiquement que $w_4 < w_3$ donc la suite n'est pas croissante.

d) Pour $x_1 = 0$: en prenant $u_0 = 1$ on constate que la suite s'éloigne de 0, ce point semble plutôt instable. Remarque: en fait, graphiquement on peut voir que la tangente à la courbe représentative de f a une pente supérieure à 1 (elle a une pente plus forte que la droite $y = x$) donc $|f'(0)| > 1$ ce qui confirme l'impression que 0 est instable.

Pour $x_2 \simeq 4$: en prenant $u_0 = 1$ (en dessous de x_2) ou bien $u_0 = 6$ (au dessus de x_2) il semble graphiquement que dans chaque cas la suite $(u_n)_n$ se rapproche de x_2 donc ce point semble stable. La même remarque que ci-dessus s'applique pour confirmer que x_2 est stable.

Pour $x_3 \simeq 6,6$: en prenant $u_0 = 6$ (en dessous de x_3) ou $u_0 = 7$ (au dessus de x_3), dans les deux cas la suite s'éloigne de x_3 donc ce point semble instable. La même remarque que ci-dessus s'applique pour confirmer que x_3 est instable.

Pour $x_4 \simeq 8,7$: en prenant $u_0 = 7$ (en dessous de x_4) il semble graphiquement que la suite $(u_n)_n$ se rapproche de x_4 donc ce point semble stable. La même remarque que ci-dessus s'applique pour confirmer que x_4 est stable.

e) 0 est un point fixe donc en prenant $u_0 = 0$ la suite $(u_n)_n$ est constante égale à 0 et donc tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{8x+6y+1}{x^2+y^2+1}$.

a) La fonction f est bien définie pour tous x et y puisque x^2+y^2+1 ne peut pas s'annuler. La courbe de niveau 1 de f est donc l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) = 1$, soit

$$\begin{aligned}
\frac{8x+6y+1}{x^2+y^2+1} = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad 8x+6y+1 = x^2+y^2+1 \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2-8x+y^2-6y = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (x-4)^2+(y-3)^2 = 25 = 5^2.
\end{aligned}$$

Elle est de la forme $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$, c'est donc le cercle $\mathcal{C}$ de centre $(x_0,y_0) = (4,3)$ et de rayon $R = 5$.

b) En appliquant la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{8(x^2+y^2+1)-(8x+6y+1)\times 2x}{(x^2+y^2+1)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{6(x^2+y^2+1)-(8x+6y+1)\times 2y}{(x^2+y^2+1)^2}.$$

c) Le vecteur gradient de f au point (x_0, y_0) est par définition le vecteur $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$. On en déduit donc que $\vec{\nabla} f(0,0) = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla} f(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8/3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. On considère une population dont l'évolution est donnée par l'équation

$$x'(t) = rx(t)(x(t) - M)(K - x(t)),$$

où $x(t)$ désigne le nombre d'individus à l'instant t exprimé en centaines d'individus. Le nombre r est le taux de croissance intrinsèque de la population, M est appelé la population seuil et K la capacité limite. Dans la suite on prendra $r = 2$, $M = 3$ et $K = 10$, l'évolution de la population est donc donnée par l'équation $x'(t) = 2x(t)(x(t) - 3)(10 - x(t))$.

a) L'équation est $x' = 2x(x-3)(10-x)$ donc la fonction f pour que l'équation s'écrive sous la forme $x' = f(x)$ est $f(x) = 2x(x-3)(10-x)$.

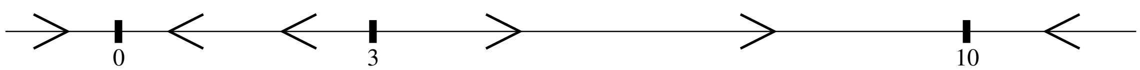
b) Les solutions stationnaires sont les fonctions constantes dont la valeur x_0 vérifie $f(x_0) = 0$, c'est-à-dire $2x_0(x_0 - 3)(10 - x_0) = 0$. Comme un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul on en déduit que soit $x_0 = 0$, soit $x_0 - 3 = 0$ c'est-à-dire $x_0 = 3$, soit $10 - x_0 = 0$ c'est-à-dire $x_0 = 10$.

c) Une solution stationnaire x_0 est stable si $f'(x_0) < 0$ et instable si $f'(x_0) > 0$. On calcule donc d'abord f'. On peut par exemple d'abord développer f, on trouve $f(x) = -2x^3 + 26x^2 - 60x$. On en déduit donc que $f'(x) = -6x^2 + 52x - 60$. On a alors $f'(0) = -60 < 0$, $f'(3) = 42 > 0$ et $f'(10) = -140 < 0$. Finalement, 0 et 10 sont stables tandis que 3 est instable.

d) Pour étudier le signe de $f(x)$ on peut par exemple faire un tableau de signe

	$-\infty$		0		3		10		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$10-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

e) Là où f est négative on aura $x'(t)$ négatif et donc la solution $x(t)$ sera décroissante, et vice-versa lorsque f est positif la solution sera croissante. On peut représenter le comportement des solutions de cette équation différentielle à l'aide du graphe suivant



On constate que juste en dessous de 0 les solutions sont croissantes tandis qu'elles sont décroissantes juste au dessus de 0 ce qui confirme que 0 est stbale, et de même pour 10. Inversement, juste en dessous de 3 les solutions sont décroissantes alors qu'elles sont croissantes juste au dessus de 3 ce qui confirme que 3 est instable.

f) D'après la question e), on en déduit les résultat suivant:

- si $x_0 < 0$, la fonction $x(t)$ est strictement croissante et tendra vers 0 (première solution stationnaire supérieure à x_0),
- si $x_0 = 0$, la fonction $x(t)$ est constante égale à 0 (solution stationnaire),
- si $0 < x_0 < 3$, la fonction $x(t)$ est strictement décroissante et tendra vers 0 (première solution stationnaire inférieure à x_0),
- si $x_0 = 3$, la fonction $x(t)$ est constante égale à 3 (solution stationnaire),
- si $3 < x_0 < 10$, la fonction $x(t)$ est strictement croissante et tendra vers 10 (première solution stationnaire supérieure à x_0),
- si $x_0 = 10$, la fonction $x(t)$ est constante égale à 10 (solution stationnaire),
- si $x_0 > 10$, la fonction $x(t)$ est strictement décroissante et tendra vers 10 (première solution stationnaire inférieure à x_0).

Si $x_0 < M = 3$ le nombre d'individus va tendre vers 0 alors que si $x_0 \geq 3$ celui-ci va soit être constant égal à 3 soit tendre vers 10. M est le seuil, nombre minimum d'individus, pour que la population ne s'éteigne pas.

Quel que soit sa valeur initiale, le nombre d'individus tendra vers une valeur inférieure ou égale à $K = 10$ d'où le terme "capacité limite".

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Les valeurs propres de A vérifient $\det(A - \lambda I) = 0$. On a $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ et donc $\det(A - \lambda I) = (2-\lambda) \times (1-\lambda) - 2 \times 3 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$. Les valeurs propres de A sont donc les solutions de l'équation du second degré $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$ et donc les solutions sont $\lambda_1 = \frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2} = -1$ et $\lambda_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2} = 4$.

b) $V_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à λ_1 si $AV_1 = \lambda_1 V_1$. On vérifie que $AV_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -V_1$. De même $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à λ_2 si $AV_2 = \lambda_2 V_2$. On vérifie que $AV_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4V_2$.

c) Les matrices $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et Q dont les colonnes sont V_1 et V_2 vérifient $D = Q^{-1}AQ$. On prend donc $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si son déterminant $\det(M) = ad - bc$ est non nul, et dans ce cas son inverse est $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Ici on a $\det(Q) = -2 \times 1 - 1 \times 3 = -5 \neq 0$ donc Q possède un inverse et on a $Q^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$.

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par récurrence par $u_0 = 5$, $v_0 = 0$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + 2v_n, \\ v_{n+1} &= 3u_n + v_n. \end{cases}$$

e) En posant, pour tout entier n, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, on vérifie qu'on a bien $AU_n = \begin{pmatrix} 2u_n + 2v_n \\ 3u_n + v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$. On a alors $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

f) La suite $(U_n)_n$ vérifie $U_{n+1} = AU_n$ pour tout n, on en déduit que $U_n = A^n U_0$. Par ailleurs, $D = Q^{-1}AQ$ donc $A = QDQ^{-1}$ et

$$A^n = (QDQ^{-1}) \times \cdots \times (QDQ^{-1}) = QD^nQ^{-1}.$$

Comme D est diagonale, on peut facilement vérifier par récurrence que $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned} U_n = A^n U_0 &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \times (-1)^n & 4^n \\ 3 \times (-1)^n & 4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times (-1)^n + 3 \times 4^n \\ -3 \times (-1)^n + 3 \times 4^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement on a $u_n = 2 \times (-1)^n + 3 \times 4^n$ et $v_n = -3 \times (-1)^n + 3 \times 4^n$.

g) On a $\dfrac{u_n}{4^n} = 2 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n + 3$. Comme $\left|-\dfrac{1}{4}\right| < 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

Numéro de copie :
L2 SV-SVN
Mathématique

UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

Examen du 09 Janvier 2013 : Feuille Annexe