L2-S3 SV/SVN
15 Mars 2011
Mathématiques

Examen

Durée: 1h30. Aucun document autorisé. Calculatrices autorisées
Un résultat numérique sans aucune justification sera considéré comme faux.

Questions de cours.
a) Enoncer la formule des probabilités totales.
b) Pour chacune des variables aléatoires suivantes, dire c'est une variable discrète ou à densité, donner sa loi (sa densité dans le cas d'une variable à densité), son espérance et sa variance: Binomiale, Géométrique, Poisson, Exponentielle.

Exercice 1. Les ampoules produites par une entreprise proviennent de 3 usines: A (30% de la production), B (25% de la production) et C (45% de la production). Une ampoule fabriquée par l'usine A a 5% de chances d'être défectueuse, par l'usine B: 8% de chances d'être défectueuse, et par l'usine C: 3% de chances d'être défectueuse.

a) Quelle est la probabilité qu'une ampoule produite par cette entreprise soit défectueuse?

b) Sachant qu'une ampoule fonctionne correctement, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'usine A?

c) Les ampoules sont vendues par boites de 2 (les 2 ampoules d'une boite donnée proviennent de la même usine). Un client achète une boite. Quelle est la probabilité que les deux ampoules de la boite soient défectueuses?

Exercice 2. On estime que la durée de vie (en années) d'un transistor est décrite par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,05$.

a) Quelle est la durée de vie moyenne d'un transistor?

b) Calculer la probabilité p qu'un transistor marche encore après 5 ans.

c) Donner une v.a. Y permettant de décrire si un transistor fonctionne encore ou non après 5 ans.

d) Déterminer t pour que la probabilité que la durée de vie du transistor soit supérieure à t soit égale à la probabilité que la durée de vie soit inférieure à t (t s'appelle la durée de vie médiane).

Un appareil électronique comporte 10 transistors. Cet appareil fonctionne si au moins 9 des 10 transistors sont en état de marche.

e) On note N le nombre de transistors de l'appareil qui sont en état de marche au bout de 5 ans. Quelle est la loi de la variable aléatoire N? Donner son espérance et sa variance.

f) Calculer la probabilité que l'appareil fonctionne pendant au moins 5 ans.

Exercice 3. La loi de probabilité jointe d'un couple (X, Y) de variables aléatoires est donnée par le tableau suivant

$Y \backslash X$	0	1	2	3
-1	7/60	1/30	1/12	1/10
0	1/20	1/20	1/12	3/20
1	1/12	1/12	1/12	1/12

a) Donner les lois marginales des variables X et Y.

b) Calculer $E(X)$, $Var(X)$, $E(Y)$ et $Var(Y)$.

c) Calculer la covariance de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes? (Justifier).

d) Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Z = X + Y$ sans calculer sa loi.

e) Calculer la probabilité de l'événement $A = \{X = Y\}$.

Exercice 4. Pour la réalisation d'un projet, une société doit effectuer successivement 2 tâches A et B. Les durées de ces tâches sont aléatoires. On désigne par X (resp. Y) la variable qui représente la durée nécessaire, exprimée en semaines, à l'accomplissement d'une tâche de type A (resp. B). On suppose que X suit une loi normale $\mathcal{N}(22, 9)$, et que Y suit une loi normale $\mathcal{N}(25, 16)$.

a) Que représentent les paramètres de ces 2 lois?

b) Déterminer la probabilité pour que la réalisation d'une tâche de type A nécessite plus de 30 semaines.

c) Soit u un réel positif. On considère l'évènement E: "$25 - u \leq Y \leq 25 + u$". Pour quelle valeur de u a-t-on $P(E) = 0,9544$?

On suppose que la réalisation des tâches A et B sont indépendantes, i.e. les variables X et Y sont indépendantes. On désigne alors par Z la variable aléatoire qui représente la durée nécessaire, exprimée en semaine, à la réalisation d'un projet, i.e. à la réalisation successive des tâches A et B. Autrement dit $Z = X + Y$.

d) Calculer l'espérance et la variance de Z.

e) On admet que Z suit une loi normale elle aussi. Quels sont ses paramètres?

f) Déterminer la probabilité que la réalisation d'un projet nécessite moins de 50 semaines.

Table de valeurs de la fonction de répartition $\Phi(x)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000