

---

Examen

---

**Durée: 2h. Aucun document autorisé. Calculatrices autorisées**  
**Un résultat numérique sans aucune justification sera considéré comme faux.**

**Questions de cours.**

- a) Donner la définition d'une variable à densité.  
b) Pour chacune des variables aléatoires suivantes, dire c'est une variable discrète ou à densité, donner sa loi (sa densité dans le cas d'une variable à densité), son espérance et sa variance: Géométrique, Poisson, Uniforme sur  $[a, b]$ .

**Exercice 1.** Dans une population présentant une douleur abdominale, 30% des patients ont une appendicite. Parmi ces derniers, 70% ont une température corporelle supérieure à  $37,5^{\circ}\text{C}$  alors que chez les patients sans appendicite, une température supérieure à  $37,5^{\circ}\text{C}$  est retrouvée dans 40% des cas. Pour un patient de cette population présentant une douleur abdominale, on définit les événements suivants:

- $A$ : le patient présente une appendicite,
- $T$ : le patient a une température corporelle supérieure à  $37,5^{\circ}\text{C}$ .

- a) Quelle est la probabilité qu'un patient de cette population ait une température inférieure à  $37,5^{\circ}\text{C}$ ?  
b) Un patient a une température supérieure à  $37,5^{\circ}\text{C}$ . Quelle est la probabilité qu'il ait une appendicite?  
c) Un patient a une température inférieure à  $37,5^{\circ}\text{C}$ . Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas une appendicite?

**Exercice 2.** On estime que la durée de vie (en années) d'un transistor est décrite par une variable aléatoire  $X$  suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 0,05$ .

- a) Quelle est la durée de vie moyenne d'un transistor?  
b) Calculer la probabilité  $p$  qu'un transistor marche encore après 5 ans.  
c) Donner une v.a.  $Y$  permettant de décrire si un transistor fonctionne encore ou non après 5 ans.  
d) Déterminer  $t$  pour que la probabilité que la durée de vie du transistor soit supérieure à  $t$  soit égale à la probabilité que la durée de vie soit inférieure à  $t$  ( $t$  s'appelle la durée de vie médiane).

Un appareil électronique comporte 10 transistors. Cet appareil fonctionne si au moins 9 des 10 transistors sont en état de marche.

- e) On note  $N$  le nombre de transistors de l'appareil qui sont en état de marche au bout de 5 ans. Quelle est la loi de la variable aléatoire  $N$ ? Donner son espérance et sa variance.  
f) Calculer la probabilité que l'appareil fonctionne pendant au moins 5 ans.

**Exercice 3.** La loi de probabilité jointe d'un couple  $(X, Y)$  de v.a. est donnée par le tableau suivant

$Y \setminus X$	8	9	10	11	12
7	0,02	0,04	0,08	0,04	0,02
9	0,06	0,04	0,30	0,07	0,03
13	0,02	0,12	0,02	0,09	0,05

- a) Donner les lois marginales des variables  $X$  et  $Y$ .  
b) Calculer  $E(X)$ ,  $V(X)$ ,  $E(Y)$  et  $V(Y)$ .  
c) Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes? (Justifier).  
d) Calculer la covariance de  $X$  et  $Y$ .  
e) Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $X + Y$ .  
f) On note  $M$  la moyenne de  $X$  et de  $Y$ , i.e.  $M = \frac{X+Y}{2}$ . Donner l'espérance et la variance de  $M$ .

