
Examen

Durée: 2h. Aucun document autorisé. Calculatrices autorisées
Un résultat numérique sans aucune justification sera considéré comme faux.

Exercice 1. La loi de probabilité jointe d'un couple (X, Y) de variables aléatoires est donnée par le tableau suivant

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|------------------|------|------|------|------|
| -1 | 7/60 | 1/30 | 1/12 | 1/10 |
| 0 | 1/20 | 1/20 | 1/12 | 3/20 |
| 1 | 1/12 | 1/12 | 1/12 | 1/12 |

- Donner les lois marginales des variables X et Y .
- Calculer $E(X)$, $Var(X)$, $E(Y)$ et $Var(Y)$.
- Calculer la covariance de X et Y . Les variables X et Y sont-elles indépendantes? (Justifier).
- Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Z = X + Y$ sans calculer sa loi.
- Calculer la probabilité de l'événement $A = \{X = Y\}$.

Exercice 2. Un joueur a trois pièces dans sa poche, deux normales et la troisième ayant deux côtés "pile" (toutes les pièces sont équilibrées). Il prend au hasard une pièce dans sa poche et la lance.

- Quelle est la probabilité d'obtenir "pile"?
- La pièce montre "pile". Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la pièce normale?
- Il lance la même pièce une seconde fois, elle montre de nouveau "pile". Que devient la probabilité précédente?
- Il la lance une troisième fois, et obtient "face". Quelle est maintenant la probabilité qu'il s'agisse d'une pièce normale?

Exercice 3. On suppose que la durée, en minutes, d'attente entre deux appels consécutifs à une ligne d'assistance informatique suit une loi exponentielle de paramètre 1.

- Rappeler la densité d'une variable exponentielle de paramètre λ ainsi que son espérance et sa variance.
- Quelle est la probabilité que l'attente entre deux appels soit comprise entre 1 et 2 minutes? soit inférieure à 10 minutes? soit supérieure à 2 minutes?
- Quelle est l'attente moyenne entre deux appels?
- Déterminer t pour que la probabilité que l'attente soit supérieure à t soit égale à la probabilité que l'attente soit inférieure à t .

Exercice 4. On sait que 5% des CD vendus par une certaine entreprise sont défectueux. Ces CD sont vendus par lots de 10. On appelle X le nombre de CD défectueux dans un lot. L'entreprise garantit contre remboursement qu'au plus 1 des 10 CD du lot est défectueux.

- Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Préciser son espérance et sa variance.
- Quelle est la probabilité qu'un lot soit remboursé?
- Si on achète 3 lots, quelle est la probabilité pour qu'exactement un de ces 3 lots soit remboursé?

