L2-S3 SV-SVN
2009/2010
Mathématiques

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Corrigé de l'Examen de Mathématiques

Exercice 1.

a) Pour déterminer les lois marginales de X et Y, on utilise les formules

$$\forall x \in X(\Omega),\ P(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x \text{ et } Y = y),$$

$$\text{et} \quad \forall y \in Y(\Omega),\ P(Y=y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x \text{ et } Y = y).$$

On obtient ainsi:

- loi de X: $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$;

$$P(X=0) = P(X=0 \text{ et } Y=-1) + P(X=0 \text{ et } Y=0) + P(X=0 \text{ et } Y=1) = 1/4;$$

  et de même $P(X=1) = 1/6$; $P(X=2) = 1/4$ et $P(X=3) = 1/3$.
- loi de Y: $Y(\Omega) = \{-1,0,1\}$; $P(Y=-1) = 1/3$; $P(Y=0) = 1/3$ et $P(Y=1) = 1/3$.

b) Par définition,

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3},$$

et

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X=x) - E(X)^2 = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^3 \times \frac{1}{3} - \frac{25}{9} = \frac{25}{18}.$$

De même, on trouve $E(Y) = 0$ et $V(Y) = 2/3$.

c) On a $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Il reste donc à calculer $E(XY)$. On a 2 méthodes pour cela.

(1)

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} xyP(X = x \text{ et } Y = y) \\ &= 0 \times -1 \times \frac{7}{60} + 1 \times -1 \times \frac{1}{30} + -1 \times \frac{1}{12} + -1 \times 3 \times \frac{1}{10} + 0 \times 0 \times \frac{1}{20} + \cdots \end{aligned}$$

(2) On pose $Z = XY$. La loi de Z est alors $Z(\Omega) = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ et $P(Z=-3) = 1/10$; $P(Z=-2) = 1/12$; $P(Z=-1) = 1/30$; $P(Z=0) = 8/15$; $P(Z=1) = 1/12$; $P(Z=2) = 1/12$ et $P(Z=3) = 1/12$. Puis on calcule $E(Z)$ comme on a calculé $E(X)$ au **c)**.

On trouve finalement $E(XY) = 0$ et donc $Cov(X,Y) = 0$.

Attention!! $Cov(X,Y) = 0$ n'implique pas que X et Y sont indépendantes (seul l'inverse est vrai). Par définition, les variables X et Y sont indépendantes ssi

$$\forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega), \quad P(X = x \text{ et } Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y).$$

Ici on a (par exemple) $P(X = 0 \text{ et } Y = -1) = 7/60$ alors que $P(X = 0) \times P(Y = -1) = 1/12$. Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

d) On a $E(X+Y) = E(X)+E(Y) = 5/3$ et $Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y) = 37/18$.

e) $P(A) = P(X = Y) = P(X = 0 \,\text{et}\, Y = 0) + P(X = 1 \,\text{et}\, Y = 1) = 2/15$.

Exercice 2. On note N l'évènement "la pièce est normale" et P celui "avoir pile". L'énoncé nous donne donc

$$P(N) = 2/3, \quad P(P|N) = 1/2, \quad P(P|\bar{N}) = 1.$$

a) On utilise la formule des probabilités totales:

$$P(P) = P(P|N) \times P(N) + P(P|\bar{N})(P) \times P(\bar{N}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

b) On utilise cette fois la formule de Bayes. On trouve

$$P(N|P) = \frac{P(P|N) \times P(N)}{P(P)} = \frac{1}{2}.$$

c) L'idée est à nouveau d'utiliser la formule de Bayes. On note PP l'évènement "2 fois pile". Les deux lancers sont indépendants l'un de l'autre mais on lance deux fois la même pièce. On a donc

$$P(N|PP) = \frac{P(PP|N) \times P(N)}{P(PP)} = \frac{P(PP|N) \times P(N)}{P(PP|N) \times P(N) + P(PP|\bar{N}) \times P(\bar{N})}$$

avec $P(PP|N) = P(P|N) \times P(P|N)$ et $P(PP|\bar{N}) = P(P|\bar{N}) \times P(P|\bar{N})$. Finalement on trouve

$$P(N|PP) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 1 \times 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

d) On peut raisonner comme au c), mais plus simplement: si la pièce n'était pas normale on ne pourrait pas avoir "face"! Donc on est certain d'avoir la pièce normale: $P(N|PPF) = 1$.

Exercice 3.

a) La densité d'une variable X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

Son espérance est $E(X) = 1/\lambda$ et sa variance est $Var(X) = 1/\lambda^2$.

b) On appelle T la variable décrivant le temps d'attente entre 2 appels consécutifs et f sa densité (f est donnée au a) avec $\lambda = 1$). On a alors

i) $P(1 \le T \le 2) = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 e^{-x}\mathrm{d}x = e^{-1} - e^{-2}$,

ii) $P(T \le 10) = \int_{-\infty}^{10} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{10} e^{-x}\mathrm{d}x = 1 - e^{-10}$,

iii) $P(T \ge 2) = 1 - P(T < 2) = 1 - \int_0^2 e^{-x}\mathrm{d}x = e^{-2}$.

c) L'attente moyenne entre 2 appels est $E(T)$. D'après a) cette attente moyenne est donc de 1mn.

d) On cherche t pour que $P(T \leq t) = P(T \geq t) = 1 - P(T < t) = 1 - P(T \leq t)$ (T est à densité donc $P(T < t) = P(T \leq t)$), et donc on veut que $2P(T \leq t) = 1$. Si $t \leq 0$ on a $P(T \leq t) = 0$ donc $t > 0$. Pour $t > 0$ on a $P(T \leq t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-t}$. On cherche donc t tel que $1 - \mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{2}$. On trouve ainsi $t = \ln 2$.

Exercice 4.

a) La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $p = 0,05$ et $n = 10$. On a $E(X) = np = 0,5$ et $Var(X) = np(1-p) = 0,475$.

b) Un lot est remboursé si $X > 1$. On a

$$P(X > 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{10}{0}(1-p)^{10} - \binom{10}{1}p(1-p)^9 \simeq 8,61\%.$$

c) Le nombre de lots remboursés suit une loi binomiale de paramètres $p' = P(X > 1)$ et $n' = 3$. La probabilité pour qu'exactement un lot soit remboursé est donc

$$P = \binom{3}{1} P(X > 1) \times (1 - P(X > 1))^2 \simeq 21,6\%.$$

Exercice 5. On utilise la table de valeurs donnée dans l'énoncé.

a) $P(X<0,71) = 0,7611$; $P(X<-0,18) = 1 - P(X<0,18) = 0,4286$ et $P(0,47<X<2,14) = P(X<2,14) - P(X<0,47) = 0,303$.

b) $P(X < a) = 0,879$ si $a = 1,17$. Puisque $0,117$ n'est pas dans la table, on en déduit que b est négatif. Par ailleurs $0,117 = 1 - 0,883$, et donc $P(X < -b) = 1 - P(X < b) = 0,883$. Ainsi $-b = 1,19$, d'où $b = -1,19$.

c) On a $P(|X| < c) = P(-c < X < c) = P(X < c) - P(X < -c) = P(X < c) - (1 - P(X < c)) = 2P(X < c) - 1$. On veut donc c tel que $2P(X<c) - 1 = 0,95 \Leftrightarrow P(X<c) = 0,975$. D'où $c = 1,96$

d) On sait que L suit une loi normale $\mathcal{N}(2, 0,008^2)$ donc $L^* = \dfrac{L-2}{0,008}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On calcule alors la probabilité que la pièce soit

i) trop petite: $P(L<2-0,014) = P(L^*<-\frac{0,014}{0,008}) = P(L^*<-1,75) = 1-P(L^*<1,75) = 1 - 0,9599 = 0,0401$,

ii) trop grosse: $P(L > 2+0,014) = P(L^*>1,75) = 1 - P(L^*<1,75) = 0,0401$,

iii) refusée: $P(L<2-0,014 \text{ ou } L>2+0,014) = P(L<2-0,014) + P(L>2+0,014) = 0,0802$.

e) Cette fois $L^* = \frac{L-2}{\sigma}$. On veut que le pourcentage de pièces refusées soit 5%, i.e.

$$P(L<2-0,014 \text{ ou } L>2+0,014) = 5\%.$$

Par ailleurs $P(L < 2 - 0,014 \text{ ou } L > 2 + 0,014) = 1 - P(2 - 0,014 < L < 2 + 0,014) = 1 - P\left(-\dfrac{0,014}{\sigma} < L^* < \dfrac{0,014}{\sigma}\right) = 1 - P\left(|L^*| < \dfrac{0,014}{\sigma}\right)$. On cherche donc σ tel que $P\left(|L^*| < \dfrac{0,014}{\sigma}\right) = 0,95$. Comme L^* suit une loi normale centrée réduite, on en déduit d'après c) que $c = \frac{0,014}{\sigma}$ et donc $\sigma = \frac{0,014}{c}$. Ainsi, $\sigma = \frac{0,014}{1,96} \simeq 0,0071$.