
Examen

Durée: 2h. Aucun document autorisé. Calculatrices autorisées
Un résultat numérique sans aucune justification sera considéré comme faux.

Questions de cours. Pour chacune des variables aléatoires suivantes, dire c'est une variable discrète ou à densité, donner sa loi (sa densité dans le cas d'une variable à densité), son espérance et sa variance: Bernoulli, Binomiale, Exponentielle, Poisson.

Exercice 1. La loi de probabilité jointe d'un couple (X, Y) de variables aléatoires est donnée par le tableau suivant

$Y \setminus X$	-2	-1	0	1	2
-1	0,02	0,04	0,08	0,04	0,02
0	0,06	0,11	0,23	0,07	0,03
1	0,02	0,05	0,09	0,09	0,05

- Déterminer les lois marginales de X et Y .
- Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
- Calculer $E(X)$, $Var(X)$, $E(Y)$ et $Var(Y)$.
- Calculer la covariance de X et Y .
- Calculer $E(X + Y)$ et $Var(X + Y)$.

Exercice 2. On considère la fonction f définie par: $f(x) = \begin{cases} 4 - 6x & \text{si } 0 \leq x \leq C \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, où $C \geq 0$.

- Pour quelle(s) valeur(s) de C la fonction f définit-elle bien une densité de probabilité?
- Soit X une variable aléatoire ayant f pour densité. Déterminer la fonction de répartition F_X de X , et représenter graphiquement f et F_X .
- Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{4})$.

Exercice 3. Pour la réalisation d'un projet, une société doit effectuer successivement 2 tâches A et B. Les durées de ces tâches sont aléatoires. On désigne par X (resp. Y) la variable qui représente la durée nécessaire, exprimée en semaines, à l'accomplissement d'une tâche de type A (resp. B). On suppose que X suit une loi normale $\mathcal{N}(22, 9)$, et que Y suit une loi normale $\mathcal{N}(25, 16)$.

- Que représentent les paramètres de ces 2 lois?
- Déterminer la probabilité pour que la réalisation d'une tâche de type A nécessite plus de 30 semaines.
- Soit u un réel positif. On considère l'évènement E : " $25 - u \leq Y \leq 25 + u$ ". Pour quelle valeur de u a-t-on $P(E) = 0,9544$?

On suppose que la réalisation des tâches A et B sont indépendantes, i.e. les variables X et Y sont indépendantes. On désigne alors par Z la variable aléatoire qui représente la durée nécessaire, exprimée en semaine, à la réalisation d'un projet, i.e. à la réalisation successive des tâches A et B. Autrement dit $Z = X + Y$.

- Calculer l'espérance et la variance de Z .
- On admet que Z suit une loi normale elle aussi. Quels sont ses paramètres?
- Déterminer la probabilité que la réalisation d'un projet nécessite moins de 50 semaines.

