L2-S3 SV-SVN-SVO
5 Juin 2008
Mathématiques

Examen de rattrapage

Durée: 1h30. Aucun document autorisé. Calculatrices autorisées.

Exercice 1. Un laboratoire a mis au point un alcootest. Les premiers essais ont conduit aux résultats suivants :

- lorsqu'une personne est réellement en état d'ébriété, 95 fois sur 100 l'alcootest est positif.
- lorsqu'une personne n'est pas en état d'ébriété, 96 fois sur 100 l'alcootest est négatif.

On sait que 2% des personnes contrôlées par la police sont réellement en état d'ébriété.

Lors d'un contrôle, une personne a un alcootest positif. Quelle est la probabilité pour que cette personne soit réellement en état d'ébriété ?

Exercice 2. On considère la loi de probabilité jointe suivante de deux variables aléatoires X et Y:

$Y \backslash X$	-2	2	10
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

a) Donner les lois de X et de Y, puis calculer leur espérance $E(X)$ et $E(Y)$.

b) Calculer la covariance de X et Y, $\text{Cov}(X,Y)$.

c) Les variables aléatoires sont-elles indépendantes?

d) Calculer les variances $V(X)$, $V(Y)$, les écart-types σ_X, σ_Y et le coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$.

Exercice 3. Dans le département de l'Hérault, l'espérance du nombre de nouveaux cas de cancer de la thyroide est de 1,05 cas par 2 mois. On suppose que la variable X correspondant au nombre de nouveaux cas observés sur <u>une année</u> suit une loi de Poisson.

a) Préciser la valeur du paramètre λ de cette loi de Poisson.

b) Calculer

(1) la probabilité qu'il y ait 2 nouveaux cas une année,
(2) la probabilité d'observer au plus 1 nouveaux cas une année,
(3) la probabilité d'observer au moins 3 nouveaux cas une année.

Exercice 4. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10}(3x^2+1) & \text{si } x \in [0;2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Vérifier que f définit bien une densité de probabilité.

b) Soit X une VAR de densité f.

(1) Calculer $p(X < \frac{1}{2})$ et $p(X > 1)$.
(2) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 5. Dans un élevage de porcs, le poids moyen m est de 151 kg et son écart-type σ de 15 kg. On suppose que ces poids sont distribués selon une loi normale.
Quelle est la probabilité qu'un porc choisi au hasard pèse:

a) Entre 121 et 160 kg?

b) Plus de 184 kg?

Exercice 6.

a) Soit X une VAR suivant une loi normale centrée réduite.
Trouver α tel que $p(X < \alpha) = 0,2$, puis β tel que $p(X > \beta) = 0,3$.

TSVP

b) On a étudié la glycémie d'une population d'individus présentant certaines caractéristiques précises. On a obtenu les résultats suivants:

(i) 20% des glycémies sont inférieures à 0,82g/l,
(ii) 30% des glycémies sont supérieures à 0,98 g/l.

On suppose que la glycémie des individus présentant ces caractéristiques suit une loi normale. Le but de l'exercice est de déterminer la moyenne m et l'écart-type σ de cette loi.

Pour la suite on notera donc G la VAR correspondant à la glycémie d'un individu de la population étudiée, on aura donc aussi $E[G] = m$ et $V[G] = \sigma^2$.

(1) Traduire à l'aide de G les données (i) et (ii) de l'énoncé.
(2) Expliquer pourquoi $\dfrac{0,82 - m}{\sigma} = \alpha$ *(où α a été déterminé à la question a).*
Trouver de même un lien entre m, σ et β *(où β a été déterminé à la question a).*
(3) Résoudre le système ainsi trouvé, puis conclure.

Table de valeurs de la fonction de répartition $\Phi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;\,1)$.

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000