L2-S3 SV-SVN
17 Décembre 2007
Mathématiques

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Examen

Durée: 2h. Aucun document autorisé. Calculatrices autorisées.
Un résultat numérique sans aucune justification sera considéré comme faux.

Exercice 1. On considère une population composée de 48% d'hommes et de 52% de femmes. La probabilité qu'un homme soit daltonien est de $0,005$ et la probabilité qu'une femme soit daltonienne est de $0,0025$. (Le daltonisme est en partie déterminé par un gène situé sur le chromosome X).

a) Quelle est la probabilité qu'une personne prise au hasard dans cette population soit daltonienne?

b) Une personne choisie au hasard dans cette population est daltonienne. Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme?

Exercice 2. La loi de probabilité jointe d'un couple (X, Y) de variables aléatoires est donnée par le tableau suivant

$Y \backslash X$	-1	0	1	2
-1	0,02	0,06	0,1	0,02
0	0,03	0,01	0,05	0,01
1	0,05	0,23	0,25	0,17

a) Déterminer les lois marginales de X et Y.

b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

c) Calculer $E(X)$, $Var(X)$, $E(Y)$ et $Var(Y)$.

d) Calculer la covariance de X et Y.

e) Calculer $E(X+Y)$ et $Var(X+Y)$.

Exercice 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x^2 + \frac{4\alpha}{3} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

a) Pour quelle(s) valeur(s) de α, la fonction f définit-elle bien une densité de probabilité?

b) Soit X une variable aléatoire de densité f. Calculer $E(X)$, $Var(X)$ et $P(X \leq \frac{1}{2})$.

Exercice 4. Un appareil électronique comporte 10 transistors. Cet appareil fonctionne si au moins 9 des 10 transistors sont en état de marche. On estime que la durée de vie (en années) d'un transistor est décrite par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,02$.

a) Calculer la probabilité p qu'un transistor marche pendant au moins 10 ans.

b) On note N le nombre de transistors de l'appareil qui sont en état de marche au bout de 10 ans. Quelle est la loi de la variable aléatoire N? Donner son espérance et sa variance.

c) Calculer la probabilité que l'appareil fonctionne pendant au moins 10 ans.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

a) Donner $P(X < 0,83)$, $P(X < -1,22)$, $P(0,27 < X < 1,11)$.

b) Trouver a tel que $P(X < a) = 0,67$, puis b tel que $P(X < b) = 0,33$.

TSVP

Exercice 6. La taille en centimètres d'un homme de 25 ans est une variable aléatoire T qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où $m = 175$ et $\sigma^2 = 36$.

a) Que représentent m et σ^2?

b) Quelle est la probabilité qu'un homme de 25 ans mesure plus de 193cm?

c) Quelle est la probabilité qu'un homme de 25 ans mesure entre 166 et 184cm?

d) Déterminer a pour que $P(T \leq a) = 0,998$.

e) Déterminer b pour que $P(|T - 175| < b) = 0,95$.

Table de valeurs de la fonction de répartition $\Phi(x)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;\, 1)$.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000