Licence 2 C-PC
Contrôle Continu n°1
Mathématiques

L'usage de la calculatrice est autorisé. Un document d'une page, réalisé individuellement à la main et préparé à l'avance, est autorisé.	*Date :* **jeudi 6 novembre 2025** *Durée :* **1h00** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 3 exercices. Un barème par exercice est proposé à titre indicatif
L'ordre dans lequel les exercices sont traités n'est pas imposé.

⋄ ⋄ ⋄

Exercice 1. [Séries numériques, 6, 5 points]

1. Démontrer si les séries numériques suivantes sont convergentes ou divergentes :

   (a) $\sum_{n\geq 1} e^{\frac{1}{n}}$ (b) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{n^3+1}$

2. Déterminer à l'aide du critère de d'Alembert si les séries numériques suivantes sont convergentes ou divergentes :

   (a) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n+1}{2^n}$ (b) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt{n!}}{(2n)!}$

Exercice 2. [Séries numériques, 4, 5 points]

1. Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+2)}$ est convergente.

On souhaite donc déterminer la valeur de la somme de cette série.

2. Montrer par récurrence que, pour tout $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(N+1)} - \frac{1}{2(N+2)}$$

3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

Exercice 3. [Séries entières, 9 points]

1. Calculer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n-1}{n!} x^n$$

2. On s'intéresse à présent à la série entière $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

   (a) Déterminer son rayon de convergence R.

   On note donc, pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

   (b) Calculer l'expression de la dérivée f' de f sur $]-R, R[$, d'abord comme somme d'une série entière, puis exprimée à l'aide de fonctions usuelles.

   (c) Vérifier que, pour n'importe quelle constante $C \in \mathbb{R}$, la fonction g définie par $g(x) = (1+x)\ln(1+x) - x + C$ est une primitive de $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$.

   (d) En déduire une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.

3. On définit la fonction « cosinus hyperbolique », notée ch, par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

   Calculer le développement en série entière en 0 de la fonction ch. Préciser le rayon de convergence de la série obtenue.