	Licence 2 C-PC **Contrôle Continu n°2** **Mathématiques**

L'usage de la calculatrice est autorisé. Un document manuscrit d'une page est autorisé.	*Date :* **jeudi 27 novembre 2025** *Durée :* **1h00** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

*Le sujet comporte 3 exercices, mais **seuls 2 sont à traiter** par chaque étudiant ou étudiante. Un barème par exercice est proposé à titre indicatif*

L'ordre dans lequel les exercices sont traités n'est pas imposé.

◇ ◇ ◇

Exercice 1 : tout le monde.

Exercice 1. [Séries de Fourier, 10 points] Soit f la fonction 2π-périodique définie par :

$$\forall x \in]-\pi,\pi], \quad f(x) = 3x$$

1. Tracer dans un repère la courbe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer le coefficient de Fourier a_0 de la fonction f.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f.

Si besoin, on admet pour la suite de l'exercice que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = 0 \qquad \text{et} \qquad b_n = 6\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

4. Donner l'expression de la série de Fourier de f.
5. (a) Calculer la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x$.

   (b) En utilisant l'égalité de Parseval pour la fonction f, calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2 : uniquement le groupe L2 PC.

Exercice 2. [Intégrales généralisées, 10 points]

1. Étudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

(a) $I_1 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$

(b) $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

2. On considère l'intégrale généralisée $I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$.
   (a) Justifier que I est convergente.
   (b) Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout $x \in [2,+\infty[$,
   $$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$
   (c) Soit $A > 2$. Calculer la valeur de l'intégrale $\int_2^{A} \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$, puis en déduire la valeur de I.

Exercice 3 : uniquement les groupes L2 C.

Exercice 3. [Séries entières, 10 points]

1. On s'intéresse dans cette question à la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n+1}{2^n} x^n$.
   (a) Déterminer son rayon de convergence R.

   On note donc, pour tout $x \in]-R,R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n$. On souhaite déterminer dans ce qui suit une expression de f.

   Pour cela, on définit une fonction F par : $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}}$. (On admet qu'il s'agit d'une série entière de même rayon de convergence R que f).

   (b) Vérifier que F est une primitive de f sur $]-R,R[$.
   (c) Pour tout $x \in]-R,R[$, calculer $\frac{1}{2}F(x)$ en reconnaissant une série géométrique.
   (d) En déduire une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.
2. Calculer le développement en série entière en 0 des fonctions suivantes. Préciser le rayon de convergence des séries obtenues.

   (a) $g(x) = 3e^{-x}$

   (b) $h(x) = \ln(1+2x)$