	Licence 2 C-PC **Contrôle Continu n°3** **Mathématiques**
	L'usage de la calculatrice est autorisé. Un document manuscrit d'une page est autorisé. — *Date :* **mardi 16 décembre 2025** *Durée :* **2h00** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 3 exercices. Un barème par exercice (sur 22 au total) est proposé à titre indicatif

L'ordre dans lequel les exercices sont traités n'est pas imposé.

⋄ ⋄ ⋄

Exercice 1. [Séries de Fourier, 8 points] Soit f la fonction 2π-périodique définie par :

$$\forall x \in [0, 2\pi[, \quad f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in [0, \pi] \\ -1 & \text{si } x \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

1. Tracer dans un repère la courbe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer le coefficient de Fourier a_0 de la fonction f.
   Indication : Penser à utiliser la relation de Chasles pour calculer l'intégrale nécessaire.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f.

Si besoin, on admet pour la suite de l'exercice que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = 0 \qquad \text{et} \qquad b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{6}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

4. Donner l'expression de la série de Fourier de f.
5. (a) Calculer la valeur de $\sin\left((2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$ pour $k = 0$, puis $k = 1$ et $k = 2$. En déduire la valeur de $\sin\left((2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) En utilisant le théorème de Dirichlet pour la fonction f en $x = \dfrac{\pi}{2}$, calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Exercice 2. [Intégrales généralisées, 9 points]

1. (a) Pour tout nombre $A < 0$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_A^0 e^{2x}\,\mathrm{d}x$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{2x}\,\mathrm{d}x$ converge, et obtenir la valeur de cette intégrale généralisée.
2. Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

(a) $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$ (b) $I_2 = \int_0^{10} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

3. On considère l'intégrale généralisée $I = \int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x-15}\,\mathrm{d}x$.
   (a) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+2x-15 = (x-3)(x+5)$.
   (b) Justifier que l'intégrale I est convergente.
   (c) Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout $x \in [4, +\infty[$,
   $$\frac{1}{(x-3)(x+5)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+5}$$
   (d) Soit $A > 4$. Calculer la valeur de l'intégrale $\int_4^A \frac{1}{x^2+2x-15}\,\mathrm{d}x$, puis en déduire la valeur de I.

Exercice 3. [Intégrales doubles, 5 points]

1. On considère $\Omega_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\right\}$.
   (a) Dessiner le domaine Ω_1 dans un repère orthonormé du plan.
   (b) Calculer l'intégrale double $\iint_{\Omega_1} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ en appliquant le théorème de Fubini.
2. On considère $\Omega_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\right\}$.
   (a) Dessiner le domaine Ω_2 dans un repère orthonormé du plan.
   (b) Calculer l'intégrale double $\iint_{\Omega_2} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ à l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires.