	Licence 2 C-PC **Contrôle Continu n°3** **Mathématiques**	
	L'usage de la calculatrice est autorisé.	*Date :* **Lundi 6 janvier 2025** *Durée :* **2h00** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel les exercices sont traités n'est pas imposé.

◇◇◇

Exercice 1. [Séries numériques, 5 points]

1. Déterminer si les séries numériques suivantes sont convergentes ou divergentes. Lorsque la série est convergente, calculer de plus la valeur de sa somme.

   (a) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n!$ (b) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 3^{-2n}$

2. Utiliser le critère de d'Alembert pour déterminer si les séries numériques suivantes sont convergentes ou divergentes.

   (a) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n}{(n-1)!}$ (b) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{2^n}{n}$

3. Utiliser un critère de comparaison pour déterminer si les séries numériques suivantes sont convergentes ou divergentes.

   (a) $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{\sqrt{n}-1}$ (b) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\cos(n)}{n^3}$

Exercice 2. [Séries entières, 4 points]

1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes.

   (a) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{x^n}{n+1}$ (b) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{4^n}{n!}x^n$

2. On s'intéresse à présent à la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{n+1}{2^{n+1}}x^n$.

   (a) Déterminer son rayon de convergence R.

   (b) Calculer la somme de cette série entière, notée $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n+1}{2^{n+1}}x^n$, pour tout $x \in]-R,R[$.

   Indication : On pourra remarquer que $f(x)$ est la dérivée de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{2^{n+1}}$, que l'on peut calculer en tant que série géométrique.

Exercice 3. [Séries de Fourier, 6 points]
Soit f la fonction 2π-périodique telle que, pour tout $x \in]-\pi, \pi]$,

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in [0, \pi] \\ 1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\end{cases}$$

1. Tracer dans un repère la courbe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer le coefficient de Fourier a_0 de la fonction f.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f.

Si besoin, on admet pour la suite de l'exercice que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = 0 \qquad \text{et} \qquad b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

4. En déduire que l'expression de la série de Fourier de f est :

$$\frac{3}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\sin\big((2k+1)x\big)}{2k+1}$$

5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la valeur de $\sin\left((2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$. *On pourra au choix utiliser le cercle trigonométrique, ou bien des propriétés de la fonction* sin.
   (b) En appliquant le théorème de Dirichlet à f pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
6. Écrire ce que donne l'égalité de Parseval appliquée à la fonction f.
7. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Exercice 4. [Intégrales généralisées, 5 points]

1. Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+3)^2}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t$

2. (a) Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout $x \in [3, +\infty[$,

$$\frac{1}{(x-2)(x+4)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+4}$$

   (b) Pour $A > 3$, calculer la valeur de $\displaystyle\int_3^{A} \frac{1}{(x-2)(x+4)}\,\mathrm{d}x$ grâce à la question précédente.
   (c) En déduire que $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x-2)(x+4)}\,\mathrm{d}x$ converge et donner sa valeur.